MODULPRÜFUNG HÖHERE MATHEMATIK 3

FÜR KYB, MECHA, PHYS, TPEL

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**. Es können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel** sind zwei eigenhändig beschriebene DIN-A4-Seiten Formelsammlung im Original (oder alternativ eine DIN-A4-Seite doppelseitig beschrieben) sowie Zeichenmaterial. Insbesondere ist es nicht zulässig, die Formelsammlung durch technische Hilfsmittel zu verkleinern. **Bücher, Fotokopien, elektronische Rechengeräte, usw. sind nicht zugelassen.**
- Es gibt insgesamt 9 Aufgaben. Bei den **Aufgaben 2, 7, 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
  Bei den anderen Aufgaben sind nur die Kästchen auszufüllen, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer. Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bis 15.04.2022 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 ($2+2+2+2+2 = 10$ Punkte)**.** Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

(a) Bestimmen Sie $\dot{\gamma}(t)$ und die Länge L der Kurve γ.

$$\dot{\gamma}(t) = \boxed{}, \qquad L = \boxed{}.$$

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld $\vec{v}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2axy - ayz + \frac{1}{16}z^2 \\ a(x^2 - y - xz) \\ bxz - 2xy \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Rotation von $\vec{v}$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist.

$$a = \boxed{}, \qquad b = \boxed{}.$$

(d) Bestimmen Sie ein Potential Φ von $\vec{v}$ für Ihre Wahl von a und b.

$$\Phi(x,y,z) = \boxed{}.$$

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral für Ihre Wahl von a und b.

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, dx \rangle = \boxed{}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^3$ die Hohlkugel

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Ferner sei das Vektorfeld $\vec{v}: B \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 \arctan z \\ y + 3z\sqrt{x} \\ \frac{1}{2}z^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, d\sigma.$$

Hierbei bezeichnet $\vec{n}$ den nach außen orientierten Einheitsnormalenvektor.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Aufgabe 3 ($2 + 2 + 1 = 5$ Punkte)**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^2$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe und ferner sei die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -2xy \sin(y^2).$$

(a) Schreiben Sie B als Normalbereich vom Typ I:

$$B = \boxed{}$$

(b) Drücken Sie das Integral durch ein Doppelintegral aus:

$$\int_B f \, dv = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie den Wert des Doppelintegrals aus Teil (b):

$$\int_B f \, dv = \boxed{}$$

Aufgabe 4 ($1+1+1+3+2 = 8$ Punkte)**.** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 4y = 50\sin t. \tag{1}$$

Sie dürfen als bekannt annehmen, dass $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(a) Finden Sie eine weitere Nullstelle des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_2 = \boxed{}.$$

(b) Schreiben Sie die allgemeine reelle Lösung der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

$$y_h(t) = \boxed{}.$$

(c) Finden Sie $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(ae^{it}) = 50\sin t$:

$$a = \boxed{}.$$

(d) Finden Sie eine reelle partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (1):

$$\text{(komplexer) Ansatz: } \boxed{},$$

$$y_p(t) = \boxed{}.$$

(e) Bestimmen Sie für $t > 0$ eine *beschränkte* Lösung y von (1) (d.h. $\sup_{t>0} |y(t)| < \infty$) mit $y(0) = 0$:

$$y(t) = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (1 + 2 + 1 + 1 = 5 Punkte)**.** Folgendes Anfangswertproblem für eine Integrodifferentialgleichung ist mithilfe der Laplace-Transformation zu lösen:

$$\dot{y}(t) + \int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)\,d\tau = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $\cosh t$:

$$\cosh t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \boxed{}\,.$$

(b) Schreiben Sie das Anfangswertproblem (2) als Gleichung für $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$\boxed{}\,.$$

(c) Lösen Sie dann Ihre Gleichung aus Teil (b) nach $Y(s)$ auf:

$$Y(s) = \boxed{}\,.$$

(d) Bestimmen Sie $y(t)$:

$$y(t) = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 6 ($1+2+2+2=7$ Punkte)**.** Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die (reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A:

$$\lambda_1 = \boxed{}, \qquad \lambda_2 = \boxed{}, \qquad \lambda_3 = \boxed{}.$$

(b) Nennen Sie eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigen- und Hauptvektoren von A, wobei $\mathbf{v}_i$ zu λ_i gehören soll.

$$\mathbf{v}_1 = \boxed{}, \qquad \mathbf{v}_2 = \boxed{}, \qquad \mathbf{v}_3 = \boxed{}.$$

(c) Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_1 = \boxed{}, \qquad \mathbf{x}_2 = \boxed{}, \qquad \mathbf{x}_3 = \boxed{}.$$

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \boxed{}.$$

Aufgabe 7 $(2+2+2+2=8$ Punkte$)$**.** Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-3, 1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{4z}{(z-1)(z+3)}.$$

(a) Finden Sie die Partialbruchzerlegung von f.

(b) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$, die im Punkt $z = 2$ konvergiert.

(c) Was ist das größte Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ in welchem die Laurentreihe aus Teil (b) konvergiert?

(d) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz.$$

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Aufgabe 8 $(4+4=8$ Punkte$)$**.** Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} + \sinh\frac{1}{z}.$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Art sämtlicher isolierter Singularitäten der Funktion f. *Bei Polstellen geben Sie auch die Ordnung an.*

Die Funktion f hat im Punkt $z_1 = \boxed{}$ eine $\boxed{}$.

Die Funktion f hat im Punkt $z_2 = \boxed{}$ eine $\boxed{}$.

(b) Berechnen Sie die entsprechenden Residuen:

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \boxed{}, \qquad \mathrm{Res}(f, z_2) = \boxed{}.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Für $\omega > 0$ berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

Hinweis: Nutzen Sie für den Integranden die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 - 2z + 2}.$$

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.