

NACHKLAUSUR HÖHERE MATHEMATIK 3

FÜR EL

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**. Es können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel** sind zwei eigenhändig beschriebene DIN-A4-Seiten Formelsammlung im Original (oder alternativ eine DIN-A4-Seite doppelseitig beschrieben) sowie Zeichenmaterial. Insbesondere ist es nicht zulässig, die Formelsammlung durch technische Hilfsmittel zu verkleinern. **Bücher, Fotokopien, elektronische Rechenggeräte, usw. sind nicht zugelassen.**
- Es gibt insgesamt 6 Aufgaben. Bei den **Aufgaben 2 und 4** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
Bei den anderen Aufgaben sind nur die Kästchen auszufüllen, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer. Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bis 14.10.2022 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte). Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t) \\ -t - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

(a) Bestimmen Sie $\dot{\gamma}(t)$ und die Länge L der Kurve γ .

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(2t) \\ \sqrt{2} \cos(2t) \\ -1 + \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad L = 2\pi. \quad (2)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^\pi \sqrt{(\sin(2t) + 1)^2 + 2 \cos^2(2t) + (\sin(2t) - 1)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2(2t) + 2 \cos^2(2t) + 2} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} b + z(b - 1) - 2ax \cos(y) \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}bx^2 \sin(y) \\ \frac{1}{2}(x + y - 1) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Rotation von \vec{v}

$$\text{rot } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ b - \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}(b - 3a)x \sin(y) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Punktvergabe: (1) falls mindestens eine Komponente richtig ist.

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so dass \vec{v} ein Gradientenfeld ist.

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Lösung: Es gilt $\text{rot } \vec{v} = 0$ genau dann, wenn $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{2}$. Da \mathbb{R}^3 einfach zusammenhängend ist, reicht diese Bedingung, damit \vec{v} ein Gradientenfeld ist.

(d) Bestimmen Sie ein Potential Φ von \vec{v} für Ihre Wahl von a und b .

$$\Phi(x, y, z) = \boxed{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \cos(y) + \frac{1}{2}z(x + y - 1)} \quad \textcircled{2}$$

Lösung: Wir integrieren die jeweiligen Komponenten partiell:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}z - x \cos(y) \right) dx &\rightarrow \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}xz - \frac{1}{2}x^2 \cos(y), \\ \int \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x^2 \sin(y) \right) dy &\rightarrow \frac{1}{2}yz - \frac{1}{2}x^2 \cos(y), \\ \int \frac{1}{2}(x + y - 1) dz &\rightarrow \frac{1}{2}z(x + y - 1). \end{aligned}$$

Das liefert das Potential

$$\Phi(x, y, z) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \cos(y) + \frac{1}{2}z(x + y - 1).$$

Punktvergabe: $\textcircled{1}$ falls mindestens zwei Terme richtig sind.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral für Ihre Wahl von a und b .

$$\int_{\gamma} \langle \vec{v}, dx \rangle = \boxed{2\pi - \pi^2} \quad \textcircled{2}$$

Lösung: Mit dem Hauptsatz für Kurvenintegrale gilt

$$\int_{\gamma} \langle \vec{v}, dx \rangle = \int_{\gamma} \langle \nabla \Phi, dx \rangle = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)).$$

Ferner gilt

$$\Phi(\gamma(\pi)) = \Phi \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ -\pi \end{pmatrix} = 2\pi - \pi^2, \text{ und } \Phi(\gamma(0)) = \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte). Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^3$ den Vollzylinder

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Ferner sei das Vektorfeld $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + \sin(y)z \\ \cos^2(x)\sqrt{z} + y \sin^2(x) \\ x^2 \arctan(y) + z \cos^2(x) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle d\sigma.$$

Hierbei bezeichnet \vec{n} den nach außen orientierten Einheitsnormalenvektor.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: Der Satz von Gauß besagt, dass $\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_B \operatorname{div} \vec{v} d(x, y, z)$. Deshalb berechnen wir die Divergenz von \vec{v} :

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = 4x + \sin^2(x) + \cos^2(x) = 4x + 1.$$

Dann ist $\int_B \operatorname{div} \vec{v} d(x, y, z)$ die Summe zweier Integrale $\int_B d(x, y, z)$ und $4 \int_B x d(x, y, z)$. Das erste Integral ist gleich dem Volumen des Vollzylinders:

$$\int_B d(x, y, z) = \pi r^2 \cdot h = \pi 2^2 \cdot 2 = 8\pi.$$

Das zweite Integral ist gleich 0, denn der Integrand ist eine ungerade Funktion in x und der Vollzylinder ist symmetrisch bezüglich der yz -Ebene. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle d\sigma = 8\pi.$$

Punktvergabe: (1) Anwendung des Satzes von Gauß.

(1) korrekte Ausrechnung von $\operatorname{div} \vec{v}$.

(2) erstes korrekt ausgerechnetes Integral.

(1) korrektes Endergebnis.

Alternativ kann man das Integral der Divergenz mit Zylinderkoordinaten ausrechnen. Der Vollzylinder B lässt sich folgendermaßen parametrisieren:

$$\Phi: [0, 2\pi] \times [0, 2] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, r, h)^T \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, h)^T$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_B (4x + 1) d(x, y, z) &= \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4(r \cos(\varphi)) + 1) \cdot r d\varphi dr dh \\ &= 4 \underbrace{\int_{-1}^1 dh \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi}_{=0} + \int_{-1}^1 dh \int_0^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^2 r dr = 8\pi.\end{aligned}$$

Punktvergabe: ① Anwendung des Satzes von Gauß.

- ① korrekte Ausrechnung von $\operatorname{div} \vec{v}$.
- ① korrekte Parametrisierung des Vollzylinders B .
- ① korrekte Koordinatentransformation mit Funktionaldeterminante r .
- ① korrektes Endergebnis.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte). Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^2$ die durch zwei verschobene Normalparabeln (in Abhängigkeit von y) berandete Fläche, siehe Abbildung 1, und ferner sei die Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\cos(x)y(y^2 - 1).$$

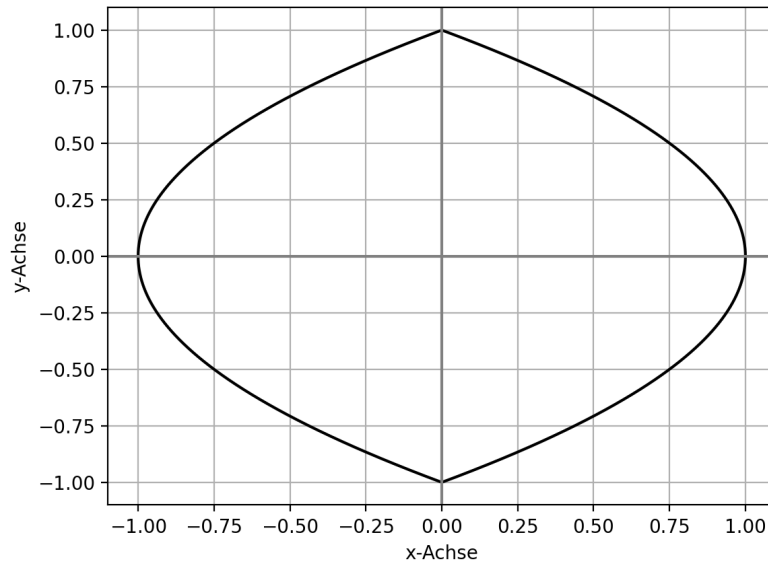


Abbildung 1: Berandung der Fläche B

(a) Schreiben Sie B als Normalbereich vom Typ II:

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq -y^2 + 1 \right\} \quad (2)$$

Lösung: Als Normalbereich vom Typ I lässt sich B darstellen als $B = B_1 \cup B_2$, mit

$$B_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, -\sqrt{x+1} \leq y \leq \sqrt{x+1} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x} \leq y \leq \sqrt{1-x} \right\}$$

Punktvergabe: (1) wenn Typ I und Typ II verwechselt wurden.

(b) Drücken Sie das Integral durch ein Doppelintegral aus:

$$\int_B f \, dv = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x, y) \, dx \quad (2)$$

Lösung: Auch korrekt:

$$\int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x, y) dx dy.$$

Punktvergabe: (1) falls mindestens bei einem von den zwei Integralen die Integrationsgrenzen richtig sind.

(2) wenn das Doppelintegral richtig ist, aber für Typ I.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Doppelintegrals aus Teil (b):

$$\int_B f dv = \boxed{0} \quad (1)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int_B f dv &= \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{-y^2+1} -\cos(x)y(y^2-1) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 y(y^2-1) \left[-\sin(x) \right]_{x=y^2-1}^{x=-y^2+1} dy = \int_{-1}^1 y(y^2-1) \underbrace{(-\sin(-y^2+1) + \sin(y^2-1))}_{=2 \sin(y^2-1)} dy = 0 \end{aligned}$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist. **Alternativ** kann man die Substitution $u = y^2 - 1$ benutzen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 2y(y^2-1) \sin(y^2-1) dy &= \int_{-1}^0 2y(y^2-1) \sin(y^2-1) dy + \int_0^1 2y(y^2-1) \sin(y^2-1) dy \\ &= - \int_{-1}^0 u \sin(u) du + \int_{-1}^0 u \sin(u) du = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2 + 1 + 3 + 2 = 8 Punkte). Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-t}. \quad (1)$$

Sie dürfen als bekannt annehmen, dass $y_0(t) = e^{-t}$ eine Lösung der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung ist.

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Nullstellen (inklusive Vielfachheiten).
- (b) Geben Sie die allgemeine reelle Lösung y_h der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung an.
- (c) Bestimmen Sie eine reelle partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (1).
- (d) Bestimmen Sie eine Lösung y von (1) mit $y(1) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9.$$

Da $y_0(t) = e^{-t}$ eine homogene Lösung ist, muss $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ sein. Mittels Polynomdivision erhält man dann die (doppelten) Nullstellen $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, also $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$.

Punktvergabe:

- ① für die Nullstelle $\lambda_1 = -1$.
- ① für die (doppelten) Nullstellen $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

(b) Nach Vorlesung ist die allgemeine homogene Lösung gegeben durch

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Punktvergabe:

- ① für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

(c) Da $\lambda_1 = -1$ eine einfache Nullstelle ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = a t e^{-t} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Mit der Leibnizregel (oder alternativ durch direktes Nachrechnen und Induktion) bekommt man

$$y_p^{(n)}(t) = a \left((-1)^n t e^{-t} + (-1)^{n-1} n e^{-t} \right)$$

für alle $n \geq 0$. Einsetzen in (1) liefert $a = 1/16$, also

$$y_p(t) = \frac{1}{16} t e^{-t}.$$

Punktvergabe:

- ① für den richtigen Ansatz $y_p(t) = a t e^{-t}$ mit $a \in \mathbb{R}$

① für die Ableitungen y'_p , y''_p und y'''_p .

① für Bestimmung von a und richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

(d) Die allgemeine Lösung von (1) ist

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Allerdings erfüllen nur Lösungen der Form

$$y(t) = \frac{1}{16}te^{-t} + ce^{-t} \quad (c \in \mathbb{R})$$

die Nebenbedingung $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$. Aus $y(1) = 0$ folgt $c = -1/16$, also

$$y(t) = \frac{1}{16}(t - 1)e^{-t}.$$

Punktvergabe:

① für den Ansatz $y(t) = \frac{1}{16}te^{-t} + ce^{-t}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

① für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

Aufgabe 5 (1 + 2 + 1 + 1 = 5 Punkte). Folgendes Anfangswertproblem für eine Integrodifferentialgleichung ist mithilfe der Laplace-Transformation zu lösen:

$$\dot{y}(t) + \int_0^t y(t - \tau) \exp(-2\tau) d\tau = 0, \quad y(0) = 1. \quad (2)$$

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \exp(-2t)$:

$$\exp(-2t) \circ \bullet \left[\frac{1}{s+2} \right] \cdot \textcircled{1}$$

(b) Schreiben Sie das Anfangswertproblem (2) als Gleichung für $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$\left[sY(s) - 1 + \frac{1}{s+2}Y(s) = 0 \right] \cdot$$

Lösung: Es gilt $\dot{y}(t) \circ \bullet sY(s) - y(0)$. $\textcircled{1}$

Das Integral $\int_0^t y(t - \tau) \exp(-2\tau) d\tau$ ist die Faltung von y und $\tau \mapsto \exp(-2\tau)$, deshalb erhalten wir das Produkt der entsprechenden Laplace-Transformierten. $\textcircled{1}$

(c) Lösen Sie dann Ihre Gleichung aus Teil (b) nach $Y(s)$ auf:

$$Y(s) = \left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} \right] \cdot \textcircled{1}$$

(d) Bestimmen Sie $y(t)$:

$$y(t) = \left[(1+t)e^{-t} \right] \cdot \textcircled{1}$$

Lösung: Das folgt aus den Rechenregeln $e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s+a)$ und $\frac{t^n}{n!} \circ \bullet \frac{1}{s^{n+1}}$.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte). Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die (reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A :

$$\lambda_1 = \boxed{-4}, \quad \lambda_2 = \boxed{-4}, \quad \lambda_3 = \boxed{0}. \quad (1)$$

(b) Nennen Sie eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von \mathbb{R}^3 aus Eigen- und Hauptvektoren von A , wobei \mathbf{v}_i zu λ_i gehören soll.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Lösung: Man beachte, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ nicht eindeutig sind, z.B. ist auch $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine mögliche Basis.

Punktvergabe: (1) falls mindestens zwei Vektoren richtig sind.

(c) Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ -3 \\ 1 \\ -4t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Lösung: Die Lösung kann man direkt vom Skript ablesen (Seite 34).

Punktvergabe: (1) falls mindestens ein \mathbf{x}_i richtig ist.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-4t} + 1 \\ -e^{-4t} + 1 \\ (4t - 1)e^{-4t} + 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Lösung: Die Lösung ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, also $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3$. Die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (4, 0, 0)^T$ impliziert $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$.

Punktvergabe: (1) falls eins der Folgenden gilt:

- Die Lösung ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.
- Die Lösung erfüllt $\mathbf{x}(0) = (4, 0, 0)^T$.