Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

10. März 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I - III

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 180 min.

Zu bearbeiten sind alle zehn Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

Die Koeffizienten a und b der Parabel

$$p(t) := t^2 + at + b$$

sollen aus den folgenden Meßdaten näherungsweise bestimmt werden:

t	0	1	2
$p(t)$	1	4	3

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf.

c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem.

Aufgabe 2

Für $a,\, b \in \mathbb{R}$ sei die folgende Rekursion gegeben:

$$x_0 := a \ , \quad x_1 := b \ , \quad x_n := \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \ , \quad n = 2, 3, \dots \ .$$

a) Setzt man $y_n := (x_{n-1}, x_n)^t$, dann erfüllen die Vektoren y_n eine Rekursion der Form $A\, y_n = y_{n+1}$. Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Bestimmen Sie eine Matrix T sowie deren Inverse T^{-1}, für welche gilt

$$T^{-1} A T = D \qquad \text{bzw.} \qquad A = TDT^{-1} \ ,$$

wobei D die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A ist.

c) Berechnen Sie $D^* := \lim_{n \to \infty} D^n$ und damit $y^* := \lim_{n \to \infty} y_n$. Welchen Grenzwert x^* besitzt demnach die Folge x_n?

Aufgabe 3

Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik

$$2x^2 + 2axy + 2y^2 - a^2 - 1 = 0$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Richtungen der Hauptachsen der Quadrik.

b) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik in Abhängigkeit vom Parameter a.

c) Geben Sie die Normalform der Quadrik an.

Aufgabe 4

Berechnen Sie

a)

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln(x) \, dx$$

b)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x}$$

c)

$$\int \frac{2 \sin x + \tan x}{1 + \cos x} \, dx$$

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion $f(x) := x + x^2 - xy^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H(x, y)$ der Funktion f.

c) Bestimmen Sie den Charakter aller kritischen Punkte.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 2\cos t + t^2 + 2 \,.$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $x(0) = x'(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 7

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 5 \,, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1 \,.$$

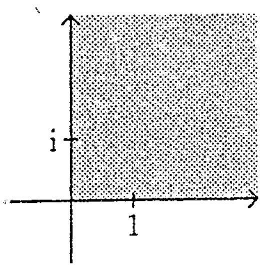
a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch eine Laplace-Transformation $y(t) \mapsto \tilde{y}(s)$ über ?

b) Lösen Sie diese Gleichung nach $\tilde{y}(s)$ auf.

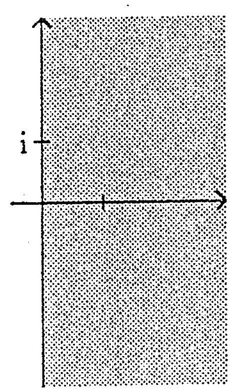
c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

Aufgabe 8

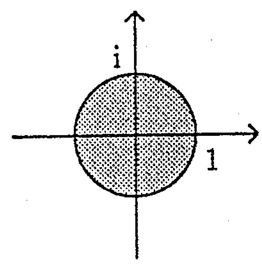
Gegeben seien die drei Gebiete in der komplexen Zahlenebene:



$\Omega_1 := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0, \mathrm{Re}\, z > 0\}$



$\Omega_2 := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$



$\Omega_3 := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$

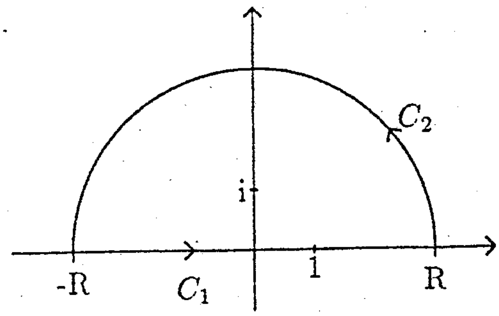
Bestimmen Sie konforme Abbildungen f_1, f_2, für welche gilt:

a) $f_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit $\mathrm{i} \to \mathrm{i}$.

b) $f_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ mit $0 \to -\mathrm{i}$ und $1 \to 0$.

Aufgabe 9

Es seien C_1 und C_2 die nebenstehend skizzierten Kurven.



a) Bestimmen Sie das Residuum der Funktion

$$f(z) := \frac{z \exp(iz)}{(z^2+1)^2}$$

an der Stelle $z = i$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{C_1+C_2} f(z)dz$.

c) Berechnen Sie das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx \ .$$

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis):

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$$

Aufgabe 10

Gegeben seien ein Vektorfeld v und eine Fläche F mit

$$v := \begin{pmatrix} 2yz \\ 0 \\ 3x^2+4y^2 \end{pmatrix}, \ F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2+z^4 = 4, z \geq 0\} \ .$$

a) Bestimmen Sie ein Vektorfeld w der Form $w = (0, w_2, 0)^T$, für das gilt

$$\operatorname{rot} w = v \quad \text{und} \quad w_2(0,0,0) = 0 \ .$$

b) Geben Sie eine Parametrisierung $\theta \mapsto (p(\theta), q(\theta), 0)^t$ der Randkurve C der Fläche F an und bestimmen Sie den Tangentenvektor von C.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluß Φ des Vektorfelds v durch die Fläche F von unten nach oben.