NACHKLAUSUR HÖHERE MATHEMATIK 3

FÜR KYB, MECHA, PHYS, TPEL

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**. Es können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel** sind zwei eigenhändig beschriebene DIN-A4-Seiten Formelsammlung im Original (oder alternativ eine DIN-A4-Seite doppelseitig beschrieben) sowie Zeichenmaterial. Insbesondere ist es nicht zulässig, die Formelsammlung durch technische Hilfsmittel zu verkleinern. **Bücher, Fotokopien, elektronische Rechengeräte, usw. sind nicht zugelassen.**
- Es gibt insgesamt 9 Aufgaben. Bei den **Aufgaben 2, 4, 8, 9** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
  Bei den anderen Aufgaben sind nur die Kästchen auszufüllen, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer. Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bis 14.10.2022 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte)**.** Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2t) \\ -t - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi].$$

(a) Bestimmen Sie $\dot\gamma(t)$ und die Länge L der Kurve γ.

$$\dot\gamma(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 + \sin(2t) \\ \sqrt{2}\cos(2t) \\ -1 + \sin(2t) \end{pmatrix}}, \qquad L = \boxed{2\pi}. \quad 2$$

Lösung:

$$\begin{aligned} L = \int_0^\pi |\dot\gamma(t)|\,dt &= \int_0^\pi \sqrt{(\sin(2t)+1)^2 + 2\cos^2(2t) + (\sin(2t)-1)^2}\,dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2\sin^2(2t) + 2\cos^2(2t) + 2}\,dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld $\vec v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec v(x,y,z) = \begin{pmatrix} b + z(b-1) - 2ax\cos(y) \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}bx^2\sin(y) \\ \frac{1}{2}(x+y-1) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Rotation von $\vec v$

$$\operatorname{rot}\vec v(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ b - \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}(b-3a)x\sin(y) \end{pmatrix}}. \quad 2$$

Punktvergabe: 1 falls mindestens eine Komponente richtig ist.

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $\vec v$ ein Gradientenfeld ist.

$$a = \boxed{\frac{1}{2}}, \qquad b = \boxed{\frac{3}{2}}. \quad 2$$

Lösung: Es gilt $\operatorname{rot}\vec v = 0$ genau dann, wenn $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{3}{2}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, reicht diese Bedingung, damit $\vec v$ ein Gradientenfeld ist.

(d) Bestimmen Sie ein Potential Φ von $\vec{v}$ für Ihre Wahl von a und b.

$$\Phi(x,y,z) = \boxed{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\cos(y) + \frac{1}{2}z(x+y-1)}.$$ 2

Lösung: Wir integrieren die jeweiligen Komponenten partiell:

$$\int \frac{3}{2} + \frac{1}{2}z - x\cos(y)\,dx \to \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}xz - \frac{1}{2}x^2\cos(y),$$
$$\int \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x^2\sin(y)\,dy \to \frac{1}{2}yz - \frac{1}{2}x^2\cos(y),$$
$$\int \frac{1}{2}(x+y-1)\,dz \to \frac{1}{2}z(x+y-1).$$

Das liefert das Potential

$$\Phi(x,y,z) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\cos(y) + \frac{1}{2}z(x+y-1).$$

Punktvergabe: 1 falls mindestens zwei Terme richtig sind.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral für Ihre Wahl von a und b.

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, dx\rangle = \boxed{2\pi - \pi^2}.$$ 2

Lösung: Mit dem Haupsatz für Kurvenintegrale gilt

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, dx\rangle = \int_\gamma \langle \nabla\Phi, dx\rangle = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)).$$

Ferner gilt

$$\Phi(\gamma(\pi)) = \Phi\begin{pmatrix}\pi\\0\\-\pi\end{pmatrix} = 2\pi - \pi^2, \text{ und } \Phi(\gamma(0)) = \Phi\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^3$ den Vollzylinder

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ -1 \leq z \leq 1\}.$$

Ferner sei das Vektorfeld $\vec{v}\colon\ B \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + \sin(y)z \\ \cos^2(x)\sqrt{z} + y\sin^2(x) \\ x^2 \arctan(y) + z\cos^2(x) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, d\sigma.$$

Hierbei bezeichnet $\vec{n}$ den nach außen orientierten Einheitsnormalenvektor.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: Der Satz von Gauß besagt, dass $\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_B \operatorname{div} \vec{v} \, d(x, y, z)$. Deshalb berechnen wir die Divergenz von $\vec{v}$:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = 4x + \sin^2(x) + \cos^2(x) = 4x + 1.$$

Dann ist $\int_B \operatorname{div} \vec{v} \, d(x, y, z)$ die Summe zweier Integrale $\int_B d(x, y, z)$ und $4\int_B x \, d(x, y, z)$. Das erste Integral ist gleich dem Volumen des Vollzylinders:

$$\int_B d(x, y, z) = \pi r^2 \cdot h = \pi 2^2 \cdot 2 = 8\pi.$$

Das zweite Integral ist gleich 0, denn der Integrand ist eine ungerade Funktion in x und der Vollzylinder ist symmetrisch bezüglich der yz-Ebene. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = 8\pi.$$

Punktvergabe: 1 Anwendung des Satzes von Gauß.

1 korrekte Ausrechnung von $\operatorname{div} \vec{v}$.

2 erstes korrekt ausgerechnetes Integral.

1 korrektes Endergebnis.

Alternativ kann man das Integral der Divergenz mit Zylinderkoordinaten ausrechnen. Der Vollzylinder B lässt sich folgendermaßen parametrisieren:

$$\Phi\colon\ [0, 2\pi] \times [0, 2] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, \qquad (\varphi, r, h)^\intercal \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)^\intercal$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_B (4x+1)\,d(x,y,z) &= \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_0^{2\pi} (4(r\cos(\varphi))+1)\cdot r\,d\varphi dr dh\\ &= \underbrace{4\int_{-1}^{1} dh \int_0^2 r^2\,dr \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\,d\varphi}_{=0} + \int_{-1}^{1} dh \int_0^2 r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\\ &= 4\pi\int_0^2 r\,dr = 8\pi.\end{aligned}$$

Punktvergabe: 1 Anwendung des Satzes von Gauß.

1 korrekte Ausrechnung von div $\vec{v}$.

1 korrekte Parametrisierung des Vollzylinders $\boldsymbol{B}$.

1 korrekte Koordinatentransformation mit Funktionaldeterminante r.

1 korrektes Endergebnis.

Aufgabe 3 $(2+2+1 = 5$ Punkte$)$**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^2$ die durch zwei verschobene Normalparabeln (in Abhängigkeit von y) berandete Fläche, siehe Abbildung 1, und ferner sei die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -\cos(x)y(y^2 - 1).$$

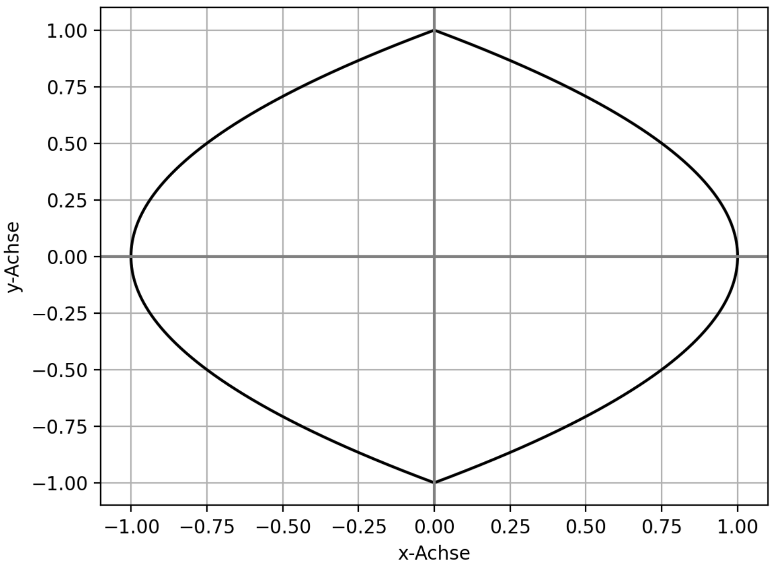

Abbildung 1: Berandung der Fläche B

(a) Schreiben Sie B als Normalbereich vom Typ II:

$$B = \boxed{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1,\ y^2 - 1 \le x \le -y^2 + 1\right\}}$$ 2

Lösung: Als Normalbereich vom Typ I lässt sich B darstellen als $B = B_1 \cup B_2$, mit

$$B_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0,\ -\sqrt{x+1} \le y \le \sqrt{x+1}\right\}$$
$$B_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x} \le y \le \sqrt{1-x}\right\}$$

Punktvergabe: 1 wenn Typ I und Typ II verwechselt wurden.

(b) Drücken Sie das Integral durch ein Doppelintegral aus:

$$\int_B f\, dv = \boxed{\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x, y)\, dx}$$ 2

Lösung: Auch korrekt:

$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Punktvergabe: 1 falls mindestens bei einem von den zwei Integralen die Integrationsgrenzen richtig sind.

2 wenn das Doppelintegral richtig ist, aber für Typ I.

(c) Bestimmen Sie den Wert des Doppelintegrals aus Teil (b):

$$\int_B f\,dv = \boxed{0}$$ 1

Lösung:

$$\int_B f\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{-y^2+1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2-1}^{-y^2+1} -\cos(x)y(y^2-1)\,dx\,dy$$
$$= \int_{-1}^{1} y(y^2-1)\big[-\sin(x)\big]_{x=y^2-1}^{x=-y^2+1}\,dy = \int_{-1}^{1} y(y^2-1)\Big(\underbrace{-\sin(-y^2+1)+\sin(y^2-1)}_{=2\sin(y^2-1)}\Big)\,dy = 0$$

da der Integrand eine ungerade Funktion ist. **Alternativ** kann man die Substitution $u = y^2 - 1$ benutzen:

$$\int_{-1}^{1} 2y(y^2-1)\sin(y^2-1)\,dy = \int_{-1}^{0} 2y(y^2-1)\sin(y^2-1)\,dy + \int_{0}^{1} 2y(y^2-1)\sin(y^2-1)\,dy$$
$$= -\int_{-1}^{0} u\sin(u)\,du + \int_{-1}^{0} u\sin(u)\,du = 0.$$

Aufgabe 4 (2 + 1 + 3 + 2 = 8 Punkte)**.** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-t}. \tag{1}$$

Sie dürfen als bekannt annehmen, dass $y_0(t) = e^{-t}$ eine Lösung der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung ist.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Nullstellen (inklusive Vielfachheiten).

(b) Geben Sie die allgemeine reelle Lösung y_h der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung an.

(c) Bestimmen Sie eine reelle partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (1).

(d) Bestimmen Sie eine Lösung y von (1) mit $y(1) = 0$ und $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9.$$

Da $y_0(t) = e^{-t}$ eine homogene Lösung ist, muss $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ sein. Mittels Polynomdivision erhält man dann die (doppelten) Nullstellen $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, also $\chi(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)^2$.

Punktvergabe:

1 für die Nullstelle $\lambda_1 = -1$.

1 für die (doppelten) Nullstellen $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

(b) Nach Vorlesung ist die allgemeine homogene Lösung gegeben durch

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + c_3 t e^{3t} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Punktvergabe:

1 für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

(c) Da $\lambda_1 = -1$ eine einfache Nullstelle ist, machen wir den Ansatz

$$y_p(t) = ate^{-t} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Mit der Leibnizregel (oder alternativ durch direktes Nachrechnen und Induktion) bekommt man

$$y_p^{(n)}(t) = a\left((-1)^n te^{-t} + (-1)^{n-1} ne^{-t}\right)$$

für alle $n \geq 0$. Einsetzen in (1) liefert $a = 1/16$, also

$$y_p(t) = \frac{1}{16} te^{-t}.$$

Punktvergabe:

1 für den richtigen Ansatz $y_p(t) = ate^{-t}$ mit $a \in \mathbb{R}$

1 für die Ableitungen y_p', y_p'' und y_p'''.

1 für Bestimmung von a und richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

(d) Die allgemeine Lösung von (1) ist

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Allerdings erfüllen nur Lösungen der Form

$$y(t) = \frac{1}{16} t e^{-t} + c e^{-t} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

die Nebenbedingung $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. Aus $y(1) = 0$ folgt $c = -1/16$, also

$$y(t) = \frac{1}{16}(t-1)e^{-t}.$$

Punktvergabe:

1 für den Ansatz $y(t) = \frac{1}{16} t e^{-t} + c e^{-t}$ mit $c \in \mathbb{R}$.

1 für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

Aufgabe 5 $(1+2+1+1=5$ Punkte$)$**.** Folgendes Anfangswertproblem für eine Integrodifferentialgleichung ist mithilfe der Laplace-Transformation zu lösen:

$$\dot{y}(t) + \int_0^t y(t-\tau)\exp(-2\tau)\,d\tau = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $f(t) = \exp(-2t)$:

$$\exp(-2t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \boxed{\frac{1}{s+2}}\,.$$

1

(b) Schreiben Sie das Anfangswertproblem (2) als Gleichung für $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$\boxed{sY(s) - 1 + \frac{1}{s+2}Y(s) = 0}\,.$$

Lösung: Es gilt $\dot{y}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad sY(s) - y(0)$. 1

Das Integral $\int_0^t y(t-\tau)\exp(-2\tau)\,d\tau$ ist die Faltung von y und $\tau \mapsto \exp(-2\tau)$, deshalb erhalten wir das Produkt der entsprechenden Laplace-Transformierten. 1

(c) Lösen Sie dann Ihre Gleichung aus Teil (b) nach $Y(s)$ auf:

$$Y(s) = \boxed{\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}}\,.$$

1

(d) Bestimmen Sie $y(t)$:

$$y(t) = \boxed{(1+t)e^{-t}}\,.$$

1

Lösung: Das folgt aus den Rechenregeln $e^{-at}f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s+a)$ und $\frac{t^n}{n!} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{n+1}}$.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte)**.** Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die (reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3$ von A:

$$\lambda_1 = \boxed{-4}, \qquad \lambda_2 = \boxed{-4}, \qquad \lambda_3 = \boxed{0}.$$ 1

(b) Nennen Sie eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigen- und Hauptvektoren von A, wobei $\mathbf{v}_i$ zu λ_i gehören soll.

$$\mathbf{v}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{v}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{v}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$ 2

Lösung: Man beachte, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ nicht eindeutig sind, z.B. ist auch $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine mögliche Basis.

Punktvergabe: 1 falls mindestens zwei Vektoren richtig sind.

(c) Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_1 = \boxed{e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{x}_2 = \boxed{e^{-4t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4t \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{x}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$ 2

Lösung: Die Lösung kann man direkt vom Skript ablesen (Seite 34).

Punktvergabe: 1 falls mindestens ein $\mathbf{x}_i$ richtig ist.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 3e^{-4t} + 1 \\ -e^{-4t} + 1 \\ (4t-1)e^{-4t} + 1 \end{pmatrix}}.$$ 2

Lösung: Die Lösung ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, also $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3$. Die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = (4, 0, 0)^\intercal$ impliziert $c_1 = -1, c_2 = -1, c_3 = 1$.

Punktvergabe: 1 falls eins der Folgenden gilt:

- Die Lösung ist eine Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$.
- Die Lösung erfüllt $\mathbf{x}(0) = (4, 0, 0)^\intercal$.

Aufgabe 7 ($2+2+2+2=8$ Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-3,1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{4z}{(z-1)(z+3)}.$$

(a) Finden Sie die Partialbruchzerlegung von f:

$$f(z) = \boxed{\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+3}}. \quad 2$$

(b) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$, die im Punkt $z = 2$ konvergiert:

$$f(z) = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k}. \quad 2$$

(c) Was ist das größte Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ in welchem die Laurentreihe aus Teil (b) konvergiert?

$$r = \boxed{1}, \quad 1 \qquad R = \boxed{3}. \quad 1$$

(d) Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = \boxed{2\pi i}. \quad 2$$

Lösung: (a) Wir schreiben

$$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+3} = \frac{Az + 3A + Bz - B}{(z-1)(z+3)}.$$

Es muss $A + B = 4$ und $3A - B = 0$ gelten, also $A = 1$ und $B = 3$. Eine Partialbruchzerlegung von f ist dementsprechend gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{z+3}.$$

Punktvergabe:

1 für den richtigen Ansatz: $f(z) = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z+3}$.

1 für Ausrechnen von A und B.

(b) Es gilt

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}, \qquad |z| > 1,$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} z^k, \qquad |z| < 3.$$

Somit lautet die Laurentreihe von f mit Entwicklungspunkt $a = 0$, die im Punkt $z = 2$ konvergiert:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k.$$

Punktvergabe:

1 für den Hauptteil $\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}$.

1 für den Nebenteil $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k z^k$.

(c) Die Laurentreihe aus Teil (b) konvergiert im Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$. Das Ringgebiet darf nicht größer sein, weil f Polstellen in 1 und -3 besitzt.

Punktvergabe:

Je 1 für die untere Grenze $r = 1$ und die obere Grenze $R = 3$ (Folgefehler beachten!).

(d) Nur die Polstelle der Ordnung 1 bei $z = 1$ liegt innerhalb des Kreises mit Radius 2 um 0 und aus der Partialbruchzerlegung aus Teil (a) folgt, dass

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-1}, 1\right) = 1.$$

Somit gilt nach dem Residuensatz, dass

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = 2\pi i.$$

Punktvergabe:

1 für Berechnung von $\operatorname{Res}(f, 1)$.

1 für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

Alternativ folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z+3}\, dz = 0$$

und aus der Cauchyschen Integralformel folgt

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i.$$

Wegen Teil (a) gilt daher

$$\oint_{|z|=2} f(z)\, dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\, dz + 3 \oint_{|z|=2} \frac{1}{z+3}\, dz = 2\pi i + 0 = 2\pi i.$$

Punktvergabe:

1 für $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i$.

1 für richtiges Endergebnis (Folgefehler beachten!).

Aufgabe 8 (4 + 4 = 8 Punkte)**.** Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} + \sinh\frac{1}{z}.$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Art sämtlicher isolierter Singularitäten der Funktion f. *Bei Polstellen geben Sie auch die Ordnung an.*

(b) Berechnen Sie die entsprechenden Residuen.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: (a) Die Funktion f hat im Punkt $z_1 = -2$ eine Polstelle der Ordnung 3. 2 Die Funktion f hat im Punkt $z_2 = 0$ eine wesentliche Singularität. 2

Punktvergabe: Jeweils noch 1, wenn die Punkte $z_1 = -2$ bzw. $z_2 = 0$ dastehen, aber die Art der Singularität falsch angegeben wurde.

(b) Da $\sinh(1/z)$ in $z_1 = -2$ analytisch ist, gilt

$$\operatorname{Res}\left(\sinh\frac{1}{z}, -2\right) = 0. \quad 1$$

Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_1) = \operatorname{Res}(f, -2) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z+2)^3}, -2\right) \\
&= \frac{1}{(3-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{3-1}(z+2)^3 f(z)\Big|_{z=-2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=-2} \\
&= \frac{1}{z^3}\Big|_{z=-2} = -\frac{1}{8}. \quad 1
\end{aligned}$$

Es gilt $\sinh'(0) = \cosh(0) = 1$. Die Laurentreihe von $\sinh(1/z)$ mit Entwicklungspunkt $z_2 = 0$ ist also gegeben durch

$$\sinh\frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \text{höhere Terme}.$$

Damit gilt

$$\operatorname{Res}\left(\sinh\frac{1}{z}, 0\right) = 1.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z+2)^3}, 0\right) &= \frac{1}{(1-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{1-1} z f(z)\Big|_{z=0} \\
&= \left(\frac{1}{(z+2)^3}\right)\Big|_{z=0} = \frac{1}{8}. \quad 1
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z+2)^3}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\sinh\frac{1}{z}, 0\right) = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}. \quad 1$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Für $\omega > 0$ berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Hinweis: Nutzen Sie für den Integranden die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z^2 + 2z + 2}.$$

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Lösung: Wir betrachten die Funktion $f(z) = \dfrac{e^{i\omega z}}{z^2 + 2z + 2}$. Der Nenner $z^2 + 2z + 2$ hat die beiden Nullstellen $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -1 - i$ mit

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{e^{i\omega z}}{\frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 2z + 2)}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{e^{i\omega z}}{(2z + 2)}\bigg|_{z=-1+i} = \frac{e^{-\omega}e^{-i\omega}}{2i}.$$

Die Funktion f ist analytisch in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von Polstellen der Ordnung 1 in z_1 und z_2. Außerdem gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \geq 0$, dass $|e^{i\omega z}| = |e^{-\omega \operatorname{Im} z}| \leq 1$, und für $|z| \geq 3$ gilt $|z^2 + 2z + 2| = |z|^2|1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}| \geq |z|^2(1 - 2/3 - 2/9) = |z|^2/9$. Also gilt $|f(z)| \leq 9|z|^{-2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $|z| \geq 3$. Wie in der Vorlesung gezeigt, folgt somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \pi e^{-\omega} e^{-i\omega}.$$

Aufgrund der Eulerschen Formel $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x$ ist das gesuchte Integral nun der Imaginärteil des letzten Integrals, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\right) = \operatorname{Im}(\pi e^{-\omega} e^{-i\omega}) = -\pi e^{-\omega} \sin \omega.$$

Punktvergabe:

- 1 für die Nennernullstellen $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -1 - i$ und Berechnung von $\operatorname{Res}(f, z_1)$.
- 1 für die Feststellungen, dass f analytisch in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der beiden Polstellen z_1 und z_2 ist (es genügt auch nur die abgeschlossene obere komplexe Halbebene zu betrachten), und dass $|f(z)| \leq C|z|^{-2}$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$ und $|z|$ hinreichend groß gilt.
- 1 für $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$.
- 1 für korrektes Endergebnis (Folgefehler beachten!).

Alternativ kann man auch eine (geeignete) geschlossene Kurve γ_R, $R > 0$, in der oberen komplexen Halbebene wählen, z.B.

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_0^{\pi} f(Re^{it}) i Re^{it}\, dt.$$

Dann gilt

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (R \to \infty)$$

sowie (wegen $|f(z)| \le C|z|^{-2}$ für $\operatorname{Im} z \ge 0$ und $|z|$ hinreichend groß)

$$\left|\int_0^{\pi} f(Re^{it})iRe^{it}\,dt\right| \le \pi C R^{-1} \to 0 \qquad (R \to \infty).$$

Mit dem Residuensatz folgt nun

$$2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1) = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (R \to \infty).$$

Der Rest des Beweises verläuft analog wie zuvor.

Punktvergabe:

1 für die Nennernullstellen $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = -1 - i$ und Berechnung von $\operatorname{Res}(f, z_1)$.

1 für Berechnung des Limes $R \to \infty$ in den gewählten Kurvenintegralen.

1 für Anwendung des Residuensatzes und Betrachtung des Limes $R \to \infty$ mit Ergebnis $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$.

1 für korrektes Endergebnis (Folgefehler beachten!).