Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–4** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 5–6** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **03.04.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3+4+1 = 8 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y \;=\; x\mathrm{e}^{2x} \;.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ für $y'' - y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x\mathrm{e}^{2x}$.

Aufgabe 2 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)

Sei $J := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,\; x_2 \geqslant x_1 \right\}$.

Sei K die geschlossene Kurve, die J berandet.

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve K.

(b) Es soll K positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu K in zwei geeignete Teilkurven K_1 und K_2 und parametrisieren Sie diese Teilkurven.

(c) Bestimmen Sie den Ausfluss $\mathrm{A}(g, K)$ als Kurvenintegral.

(d) Bestimmen Sie $\iint_J \operatorname{div} g(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$ als Gebietsintegral. Verwenden Sie hierzu Polarkoordinaten.

(e) Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Gauß.

Aufgabe 3 (2+6 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ (x-\pi)^2 & \text{falls } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Bitte wenden →

Aufgabe 4 (1+1+3+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix} .$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $2\mathrm{i}$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.

(b) Geben Sie die Wronskimatrix $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)$ an und bestimmen Sie die Inverse $\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x)^{-1}$.

(c) Man bestimme eine partikuläre Lösung $f_{\mathrm{p}}(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}$.

(d) Man bestimme alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (2+1 = 3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

$\mathcal{L}(\cosh(2t)) = \boxed{}$ $\mathcal{L}(-t \cdot \cosh(2t)) = \boxed{}$

(b) Finden Sie eine Funktion $f(t)$, für die $\mathcal{L}(f(t) * f(t)) = \dfrac{1}{(s-3)^2}$ ist.

$f(t) = \boxed{}$

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = 4u_{xx} , \quad u(x,0) = f(x) = 3\cos(x) , \quad u_t(x,0) = g(x) = \cos(x) .$$

(a) Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)\,\mathrm{d}s = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mittels der d'Alembertschen Formel:

$u(x,t) = \boxed{}$
