

# Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

---

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–4** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 5–6** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **03.04.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

---

**Aufgabe 1 (3+4+1 = 8 Punkte)**

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = xe^{2x}.$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
- (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung  $f_p(x)$  für  $y'' - y' - 2y = xe^{2x}$ .  
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?
- (c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung  $y'' - y' - 2y = xe^{2x}$ .

*Lösung.*

- (a) Die lineare Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

$$p(X) = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

Die Nullstellen von  $p(X)$  sind 2 und  $-1$ . Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = e^{-x}.$$

- (b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form  $r(x)e^{\mu x}$ , wobei  $r(x) = x$  ein Polynom von Grad 1 und  $\mu = 2$  ist.

Da  $\mu$  eine einfache Nullstelle von  $p(X)$  ist, liegt der Resonanzfall vor mit  $m = 1$ . Wir setzen daher an:

$$f(x) = (ax + b)xe^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x}.$$

Wir werten das charakteristische Polynom in  $D + \mu$  aus, wobei  $D$  der Differentialoperator ist.

Es gilt  $p(X + 2) = (X + 2)^2 - (X + 2) - 2 = (X + 2 - 2)(X + 2 + 1) = X^2 + 3X$  und daher  $p(D + 2) = D^2 + 3D$ .

Nun wenden wir  $p(D + 2)$  auf den Polynomanteil  $ax^2 + bx$  des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil  $x$  der rechten Seite:

$$\begin{aligned} x &\stackrel{!}{=} p(D + 2)(ax^2 + bx) \\ &= (D^2 + 3D)(ax^2 + bx) \\ &= 2a + 6ax + 3b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert  $a = \frac{1}{6}$  und  $b = -\frac{1}{9}$ .

Somit ist  $f_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{2x}$  eine partikuläre Lösung.

*Alternative Lösung.*

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx)e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b) e^{2x} \\f''(x) &= (4ax + 2a + 2b) e^{2x} + 2(2ax^2 + (2a + 2b)x + b) e^{2x} \\&= (4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b)) e^{2x} .\end{aligned}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}xe^{2x} &= (4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b)) e^{2x} - (2ax^2 + (2a + 2b)x + b) e^{2x} - 2(ax^2 + bx)e^{2x} \\&= (6ax + 2a + 3b) e^{2x}\end{aligned}$$

Gelten soll also:  $6ax + 2a + 3b = x$ .

Koeffizientenvergleich liefert  $a = \frac{1}{6}$  und  $b = -\frac{1}{9}$ .

Somit ist  $f_p(x) = (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x) e^{2x}$  eine partikuläre Lösung.

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = f_p(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x) e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x},$$

wobei  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

---

**Aufgabe 2 (2+2+4+3+1 = 12 Punkte)**

Sei  $J := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_2 \geq x_1 \right\}$ .

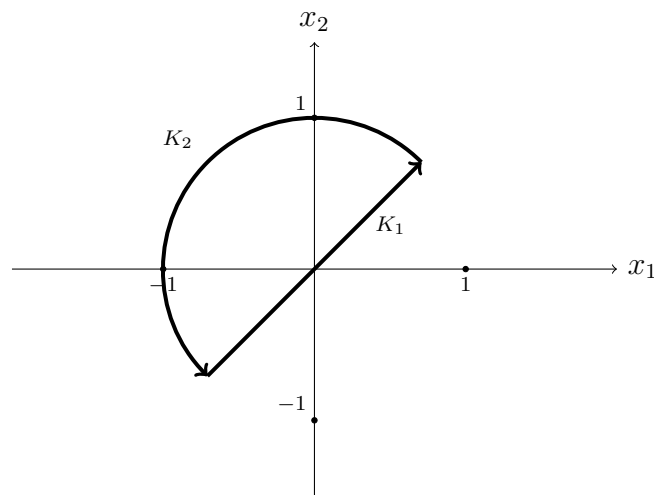
Sei  $K$  die geschlossene Kurve, die  $J$  berandet.

Wir betrachten das Vektorfeld  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ .

- Skizzieren Sie die Kurve  $K$ .
- Es soll  $K$  positiv orientiert parametrisiert werden. Zerlegen Sie dazu  $K$  in zwei geeignete Teilkurven  $K_1$  und  $K_2$  und parametrisieren Sie diese Teilkurven.
- Bestimmen Sie den Ausfluss  $A(g, K)$  als Kurvenintegral.
- Bestimmen Sie  $\iint_J \operatorname{div} g(x) dx_1 dx_2$  als Gebietsintegral. Verwenden Sie hierzu Polarkoordinaten.
- Verifizieren Sie in diesem Fall den Satz von Gauß.

*Lösung.*

- Skizze von  $K = K_1 \cup K_2$ :



- Wir zerlegen die Kurve  $K$  wie in (a) skizziert in zwei Teilkurven,  $K = K_1 \cup K_2$ .

Die Teilkurve  $K_1$  parametrisieren wir mittels

$$C_1 : \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C_1(t) = \begin{pmatrix} C_{1,1}(t) \\ C_{1,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} .$$

Die Teilkurve  $K_2$  parametrisieren wir mittels

$$C_2 : \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C_2(t) = \begin{pmatrix} C_{2,1}(t) \\ C_{2,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} .$$

(c) Der Ausfluss wird wie folgt berechnet.

$$A(g, K) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} g(C_1(t)) \cdot \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(C_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} dt.$$

Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} g(C_1(t)) \cdot \begin{pmatrix} C'_{1,2}(t) \\ -C'_{1,1}(t) \end{pmatrix} dt &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} t^2 - t^2 \\ t \cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -t^2 dt \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(C_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} C'_{2,2}(t) \\ -C'_{2,1}(t) \end{pmatrix} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \begin{pmatrix} \cos(t)^2 - \sin(t)^2 \\ \cos(t) \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)^3 dt \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $u := \sin(t)$  und  $du = \cos(t)dt$  wird

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)^3 dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(t)(1 - \sin(t)^2) dt \\ &= \int_{u(\frac{\pi}{4})}^{u(\frac{5\pi}{4})} 1 - u^2 du \\ &= \left[ u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} = -\frac{5}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Der gesamte Ausfluss ist also gegeben durch

$$A(g, K) = \left( -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right) + \left( -\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2}.$$

(d) Die Divergenz von  $g$  ist

$$\operatorname{div}(g(x)) = \operatorname{div}(g(x_1, x_2)) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 3x_1.$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechnen wir das Integral

$$\begin{aligned}\iint_J \operatorname{div}(g(x)) \, dx_1 \, dx_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 3r \cos(\varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi) \left( \int_0^1 3r^2 \, dr \right) \, d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi) [r^3]_0^1 \, d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos(\varphi) \, d\varphi \\ &= [\sin(\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(e) Wir erhalten

$$A(g, K) = -\sqrt{2} = \iint_J \operatorname{div}(g) \, dx_1 \, dx_2$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.

---

## Aufgabe 3 (2+6 = 8 Punkte)

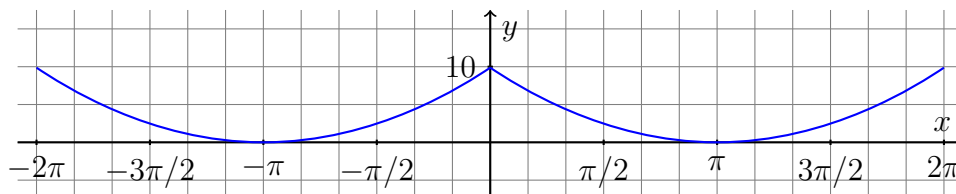
Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die  $2\pi$ -periodische Funktion, die für  $-\pi < x \leq \pi$  gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2 & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ (x - \pi)^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$ .  
 (b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von  $f(x)$ .

Lösung.

- (a) Skizze von  $f(x)$ :



- (b) Es ist  $b_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , da  $f$  gerade ist.

Wir erhalten für  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi)^2 \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ (x - \pi)^2 \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2(x - \pi) \frac{1}{n} \sin(nx) \, dx \right) \\ &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^\pi (x - \pi) \sin(nx) \, dx \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left( \left[ (x - \pi) \left( -\frac{1}{n} \cos(nx) \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{n} \cos(nx) \, dx \right) \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left( -\frac{\pi}{n} - \left[ -\frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Für  $n = 0$  ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x - \pi)^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} (x - \pi)^3 \right]_0^\pi = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Somit ist die Fourier-Reihe von  $f(x)$  gegeben durch

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx).$$

**Aufgabe 4 (1+1+3+1 = 6 Punkte)**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \cos(2x) \\ x \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Sei  $A := \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Es ist  $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $2i$ .

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von  $y' = Ay$ .
- (b) Geben Sie die Wronskimatrix  $W_{\text{sys}}(x)$  an und bestimmen Sie die Inverse  $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$ .
- (c) Man bestimme eine partikuläre Lösung  $f_p(x)$  von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \cos(2x) \\ x \sin(2x) \end{pmatrix}$ .
- (d) Man bestimme alle Lösungen von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \cos(2x) \\ x \sin(2x) \end{pmatrix}$ .

*Lösung.*

- (a) Wir schreiben  $2i = 0 + 2i$  und

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ergeben sich die linear unabhängigen Lösungen

$$f_{[1]}(x) = e^0(\cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix},$$

$$f_{[2]}(x) = e^0(\sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

- (b) Es ist

$$W_{\text{sys}}(x) = (f_{[1]}(x), f_{[2]}(x)) = \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}$$

und

$$W_{\text{sys}}(x)^{-1} = \frac{1}{-\sin(2x)^2 - \cos(2x)^2} \begin{pmatrix} \sin(2x) & -\cos(2x) \\ -\cos(2x) & -\sin(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

*Alternative Lösung:* Es ist

$$W_{\text{sys}}(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} W_{\text{sys}}(x)^{-1} &= W_{\text{sys}}(0)^{-1} W_{\text{sys}}(-x) W_{\text{sys}}(0)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(2(-x)) & \cos(2(-x)) \\ \cos(2(-x)) & \sin(2(-x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & -\sin(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) Ansatz mit Variation der Konstanten:  $f_p(x) = c_1(x)f_{[1]}(x) + c_2(x)f_{[2]}(x)$ .

Es ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= W_{\text{sys}}(x)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \cos(2x) \\ x \sin(2x) \end{pmatrix} \\
&= x \cdot \begin{pmatrix} -\sin(2x) & \cos(2x) \\ \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit können wir  $c_1(x) = 0$  und  $c_2(x) = \frac{1}{2}x^2$  wählen.

Damit folgt

$$f_p(x) = \frac{1}{2}x^2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

(d) Jede Lösung von  $y' = Ay + \begin{pmatrix} x \cos(2x) \\ x \sin(2x) \end{pmatrix}$  ist von der Form

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}}_{f_p(x)} + \underbrace{d_1 \begin{pmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}}_{f_h(x)},$$

wobei  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 5 (2+1 = 3 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die folgenden Laplace-Transformierten.

$$\mathcal{L}(\cosh(2t)) = \frac{s}{s^2 - 4}$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2}\right)$  ist auch richtig.

$$\mathcal{L}(-t \cdot \cosh(2t)) = -\frac{s^2 + 4}{(s^2 - 4)^2}$$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right)$  ist auch richtig.

(b) Finden Sie eine Funktion  $f(t)$ , für die  $\mathcal{L}(f(t) * f(t)) = \frac{1}{(s - 3)^2}$  ist.

$$f(t) = e^{3t}$$

$-e^{3t}$  ist auch richtig.

**Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)**

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x) = 3 \cos(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) = \cos(x).$$

(a) Bestimmen Sie das Integral:

$$\int_{x-2t}^{x+2t} g(s) \, ds = \sin(x + 2t) - \sin(x - 2t) = 2 \cos(x) \sin(2t)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mittels der d'Alembertschen Formel:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(3 \cos(x - 2t) + 3 \cos(x + 2t)) + \frac{1}{4}(\sin(x + 2t) - \sin(x - 2t)) = 3 \cos(x) \cos(2t) + \frac{1}{2} \cos(x) \sin(2t)$$