Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4, eigenhandgeschrieben.
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Sofern nicht anders angegeben, ist nur das Endergebnis einzutragen. Andernfalls sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Als **Bonus** ausgewiesene Aufgaben können bearbeitet werden, um Bonuspunkte zu sammeln. Diese sind möglicherweise etwas kniffliger und zählen nicht zur Maximalpunktzahl.
- Neben den Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen können Sie folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte ohne Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$\sin(x)\cos(x)+x$	$x-\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)^2$
$f'(x)$	$2\cos(x)^2$	$2\sin(x)^2$	$2\sin(x)\cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Integrierender Faktor — 4 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ mit $f(x,y) = y^2 + y\sinh(x)$ und $g(x,y) = xy$.

1. Bestimmen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f,g)$.

$$\operatorname{rot}(f,g) = \boxed{}\,.$$

2. Finden Sie einen integrierenden Faktor λ für obige DGL.

$$\lambda(x,y) = \boxed{}\,.$$

3. Geben Sie ein Potential Φ der Differentialgleichung an.

$$\Phi(x,y) = \boxed{}\,.$$

4. Geben Sie alle Lösungen $y :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ der DGL an.

$$y(x) = \boxed{}\,, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

5. (Bonus, 1 Punkt) Geben Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ der DGL an.

Aufgabe 2 (Fourier–Transformation — 3 Punkte)

1. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{[-\pi,\pi]}(x) \sin(x)$.

Begründete Antwort:

$\hat{f}(\xi) =$

2. (Bonus, 1 Punkt) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

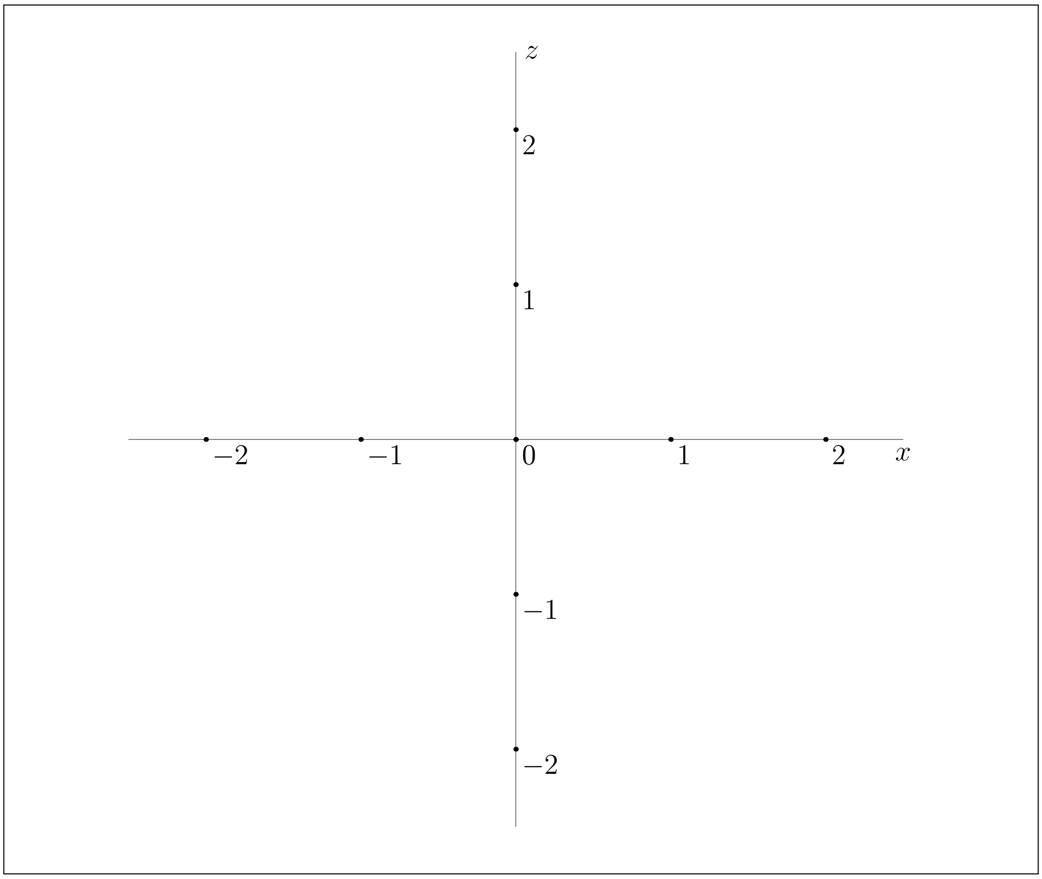
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{}.$$

Aufgabe 3 (Integration im Raum — 12 Punkte)

Der Rotationskörper K sei definiert durch

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \le z \le 2 - 2x^2 - 2y^2 \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,z \in \mathbb{R}\}$.



2. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten $\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:

$$K = \left\{ \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \varphi \in [0, 2\pi], \begin{array}{c} \boxed{} \le r \le \boxed{} \\ \boxed{} \le z \le \boxed{} \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie das Volumen von K.
   Hinweis: Es gilt $\int_0^{\pi/2} u\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - 1$.

Begründete Antwort:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

4. Durch $\Psi(\varphi, r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2-2r^2)$ wird eine Teilfläche M des Randes von K parametrisiert. Berechnen Sie die Jacobi–Matrix Ψ' und das Kreuzprodukt $\partial_\varphi\Psi \times \partial_r\Psi$.

$\Psi'(\varphi, r) =$ $\boxed{}$, $\quad \partial_\varphi\Psi \times \partial_r\Psi =$ $\boxed{}$.

5. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y-x \\ 2y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fluss von f durch M nach *außen*.

Begründete Antwort:

$\int_M f \cdot \mathrm{d}S =$

6. (Bonus, 2 Punkte) Bezeichne N die restliche Randfläche von K. Berechnen Sie die Divergenz von f und schließen Sie auf den Wert des Flusses von f durch N nach *außen*.

$\mathrm{div}(f) = \boxed{}$, $\quad \int_N f \cdot \mathrm{d}S = \boxed{}$

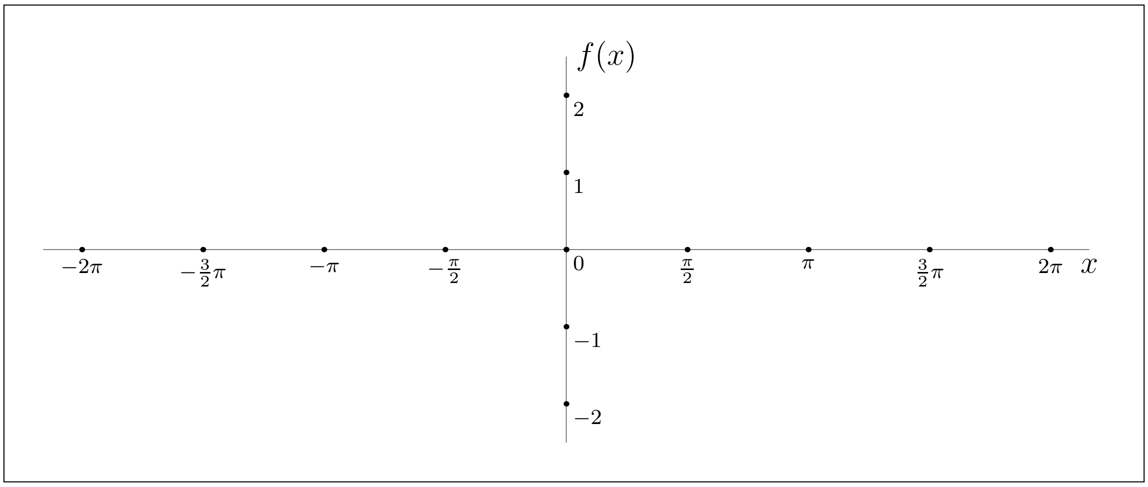
Aufgabe 4 (Fourier–Reihen — 11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion mit $f(x) = 1 - \frac{4}{\pi}x$ für $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und $f(x) = -1$ für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1. Was sind die Werte von f in 0, π, $-\pi$?

$$f(-\pi) = \boxed{\quad}, \qquad f(0) = \boxed{\quad}, \qquad f(\pi) = \boxed{\quad}.$$

2. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Kennzeichnen Sie dabei Unstetigkeitsstellen.



3. Bezeichne S_f die Fourier—Reihe von f. Bestimmen Sie die reellen und komplexen Darstellungen von S_f.

   Hinweis: Es gilt $\int_0^{\pi/2} x\sin(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}\sin(\frac{\pi t}{2}) - \frac{\pi}{2t}\cos(\frac{\pi t}{2})$.

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx), \text{ mit} \qquad a_k = \boxed{} \quad (k \geq 0),$$

$$b_{2k+1} = \boxed{} \quad (k \geq 0), \qquad b_{2k} = \boxed{} \quad (k > 0).$$

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}, \text{ mit} \qquad c_0 = \boxed{},$$

$$c_{2k+1} = \boxed{}, \qquad c_{2k} = \boxed{}.$$

4. (Bonus, 2 Punkte) Berechnen Sie $S_f(\frac{\pi}{2})$ und schließen Sie auf den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

$$S_f(\pi/2) = \boxed{}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (Lineare Differentialgleichungssysteme — 6 Punkte)
Zu lösen ist das lineare, homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' &= & & y_2 & - & 3y_3, & & \\ y_2' &= & 3y_1 & + & 2y_2 & - & 6y_3, & \\ y_3' &= & y_1 & + & y_2 & - & 3y_3, & \\ y_4' &= & y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & - \; y_4. \end{cases} \tag{H}$$

1. Formulieren Sie (H) in der Gestalt $y' = Ay$ für eine Matrix A:

$$A = \boxed{}.$$

2. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ des $\mathbb{C}^4$ an, die obige Jordan–Normalform realisiert.

$$v_1 = \boxed{}, \qquad v_2 = \boxed{}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalmatrix Y für (H):

$$Y(x) = \boxed{}.$$

4. Lösen Sie (H) zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 2$ und $y_4(0) = 3$:

$$y(x) = \boxed{}.$$

Wir betrachten nun das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} y_1' & = & & & y_2 & - & 3y_3 & & & + & 1, \\ y_2' & = & 3y_1 & + & 2y_2 & - & 6y_3 & & & - & 3x, \\ y_3' & = & y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & & & - & x, \\ y_4' & = & y_1 & + & y_2 & - & 3y_3 & - & y_4 & + & 2. \end{array}\right. \tag{I}$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Nutzen Sie den Ansatz $y(x) = Y(x) \cdot c(x)$, um eine partikuläre Lösung y von (I) mit Anfangswerten $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$ und $y_4(0) = 0$ zu bestimmen. Berechnen Sie dazu zunächst $c'(x)$.

$$c'(x) = \boxed{}, \qquad y(x) = \boxed{}.$$

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichungen — 8 Punkte)

Wir untersuchen die für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = -u, \qquad u(0,y) = \frac{1}{y^2+1}. \tag{P}$$

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ fest und $(X(t), Y(t))$ die Charakteristik der Differentialgleichung (P) mit Anfangswert $(X(0), Y(0)) = (0, y_0)$. Sei weiter $U(t) = u(X(t), Y(t))$.

1. Formulieren Sie die charakteristischen Gleichungen zu (P).

$$X'(t) = \boxed{}, \quad X(0) = 0,$$

$$Y'(t) = \boxed{}, \quad Y(0) = y_0,$$

$$U'(t) = \boxed{}, \quad U(0) = \frac{1}{y_0^2+1}.$$

2. Lösen Sie die charakteristischen Gleichungen.

$$X(t) = \boxed{},$$

$$Y(t) = \boxed{},$$

$$U(t) = \boxed{}.$$

3. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wie sind t und y_0 zu wählen, sodass $(x, y) = (X(t), Y(t))$ gilt?

$$t = \boxed{}, \qquad y_0 = \boxed{}.$$

4. Schließen Sie auf die Lösung von (P):

$$u(x, y) = \boxed{}.$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Wir betrachten dieselbe Differentialgleichung mit anderen Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = -u, \qquad u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{P'}$$

Besitzt diese eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese, falls ja, und begründen Sie, falls nein.

Begründete Antwort:

Aufgabe 7 (Wahrscheinlichkeitsrechnung — 7 Punkte)

Wir betrachten drei gezinkte Münzen A, B und C, die jeweils zwei Seiten haben: Kopf oder Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Münzwurf Kopf zu erhalten, beträgt jeweils 0.3, 0.6 und 0.75.

1. Wir wählen zufällig gleichverteilt eine der drei Münzen und werfen sie. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu erhalten?

$$P(\text{Zahl}) = \boxed{}.$$

2. Wir wählen zufällig gleichverteilt eine Münze aus und werfen sie. Das Ergebnis des Wurfs ist Kopf. Was ist die Wahrscheinlichkeit, die Münze A bzw. die Münze B gewählt zu haben?

$$P(A \,|\, \text{Kopf}) = \boxed{}, \qquad P(B \,|\, \text{Kopf}) = \boxed{}.$$

Für eine gezinkte Münze möchten wir die Wahrscheinlichkeit p schätzen, dass die Münze nach einem Wurf Kopf zeigt. Dazu werfen wir die Münze n mal. Es bezeichne X_n die Anzahl der erhaltenen Köpfe. Gesucht ist nun die Mindestzahl an Würfen, damit sich die Zahl X_n/n mit 80% Wahrscheinlichkeit p auf 0.01 annähert. Wir benutzen dazu den zentralen Grenzwertsatz ohne Berücksichtigung des Näherungsfehlers, sodass

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq 0.01\right) \approx \int_a^b \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}\xi.$$

3. Berechnen Sie a und b als Funktionen von n und p.

$$a = -b, \qquad b = \boxed{}.$$

4. Bestimmen Sie näherungsweise $t \geq 0$, sodass $\int_{-t}^{t} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{d}\xi = 0.8$ ist.

$$t \approx \boxed{}.$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Benutzen Sie die Ungleichung $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ für $x \in [0,1]$, um eine Schranke für b zu finden, die nur noch von n abhängt. Leiten Sie daraus einen möglichst kleinen Wert für n ab, für den $\int_a^b \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}\xi \geq 0.8$.

$$b \geq \boxed{}, \qquad n \geq \boxed{}.$$

(Hierbei muss n nicht in vollständig vereinfachter Form angegeben werden.)

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.