

2. Modulprüfung Mathematik 1 und 2 für inf, swt 2021/2022

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, Dr. E. Chavli, 21. Februar 2023

- **Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!**
- **Erlaubte Hilfsmittel sind: Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.**
- **Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.**

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (9=3+3+3 Punkte)

Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Bestimmen Sie $d := \text{ggT}(28, 64)$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = 28a + 64b$.
- (b) Schreiben Sie die komplexe Zahl $z := \frac{1}{1+2i} - \frac{3i}{2+i} \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) Sei $K = \mathbb{F}_5$ (Körper mit 5 Elementen) und $A_t := \begin{pmatrix} t & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & t \end{pmatrix} \in M_3(K)$ für $t \in K$.
Berechnen Sie $\det(A_t)$ und bestimmen Sie alle $t \in K$ mit $\det(A_t) = \bar{0}$.

Bei der Bearbeitung der nachfolgenden 5 Aufgaben genügt es nicht, nur die Lösungen anzugeben, sondern Begründungen und Zwischenrechnungen gehören mit zur Lösung der Aufgabe; d.h., es muss nachvollziehbar sein, wie Sie die Lösungen gefunden haben.

Aufgabe 2. (10=3+3+4 Punkte) Thema: Matrizen und lineare Gleichungen.

Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 5}$.

- (a) Bringen Sie A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums $N(A) := \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = 0_2\}$.
- (c) Berechnen Sie $B := A \cdot A^{\text{tr}}$. Ist B invertierbar? Wenn ja, so bestimmen Sie B^{-1} .

Aufgabe 3. (11=3+3+3+2 Punkte) Thema: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit.

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom, oder das charakteristische Polynom von A (Sie können sich aussuchen, welches Sie bestimmen), sowie alle Eigenwerte von A .
- (b) Bestimmen Sie Basen für die zugehörigen Eigenräume.
- (c) Bestimmen Sie jeweils Orthonormalbasen für die Eigenräume.
- (d) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in M_3(\mathbb{R})$ mit $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

Aufgabe 4. (10=(3+3)+(2+2) Punkte) Thema: Folgen und Reihen.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn diese existieren):

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sin(n) - n)^3 + (-1)^{n^2}}{4n^3 - n^2}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (n(\exp(1/n) - 1)).$$

(b) Gegeben sei die Folge $a_n := \frac{n+2}{2n^3+3}$ für $n \geq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $a_n \leq \frac{3}{2n^2}$ gilt für alle $n \geq 1$. (Vollständige Induktion hilft hier nicht.)

(ii) Konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5. (10=2+3+3+2 Punkte) Thema: Partielle Ableitungen und lokale Extrema.

Gegeben Sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f , sowie die Werte von f an diesen kritischen Punkten. (*Hinweis:* Es gibt 2 kritische Punkte (x, y) .)

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix für jeden kritischen Punkt von f , sowie jeweils die Eigenwerte der Hesse-Matrix.

(d) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, oder kein lokales Extremum.

Aufgabe 6. (12=(2+2+4)+4 Punkte) Thema: Integrale und Differentialgleichungen.

(a) Gegeben sei die rationale Funktion $r(x) := \frac{2}{x^3+x}$ für $x > 0$.

(i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $r(x)$.

(ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $r(x)$, definiert für alle $x > 0$.

(iii) Sei $I := \int_{1/2}^2 r(x) dx$. Zeigen Sie, dass $1 < I < 3/2$ gilt.

(b) Gegeben sei die DGL 1. Ordnung $y' = -\frac{x(y^3+y)}{x^2+2}$.

Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der DGL, für die $y(0) = 1$ gilt.