Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(2+2+2+2+2)*

a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = -64.$$

Geben Sie dabei die Lösungen in Polarkoordinaten an.

b) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 8y = 0.$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

e) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Punktes $P = (3, 1, 2)$ auf die Ebene E.

Aufgabe 2 *(6+4)*

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(x_n) \quad$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{\pi}{2}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)\cos(x)}{\sin^2(x) - x^4}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x \frac{\sinh(t)}{42 + t^{50}} dt.$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 8x + 15} dx.$$

Aufgabe 3 *(2+3+1+1+3)*

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A an.

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an und begründen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $D = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Bestimmen Sie die allgemeine, reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$.

e) Um welche Art von Quadrik handelt es sich bei $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^T Ax = 3\}$.

Aufgabe 4 *(2+2+2+4)*

Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} x^{2n}$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(0), f'(0), f''(0)$ und $f^{(303)}(0)$.

c) Überprüfen Sie, ob Konvergenz in den Randwerten $x = R$ und $x = -R$ vorliegt.

d) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

konvergent ist.
Hinweis: Spalten Sie dazu das Integral auf in $\int_0^1 ...dx + \int_1^{\infty} ...dx$.

Aufgabe 5 *(1+1+2+2+4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin(x^2 + xy + x^7 y^5).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0, 0)$.

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0, 0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung an.

d) Geben Sie für f das Taylorpolynom T_3 der dritten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ an.

e) Gegeben seien die Funktionen $h, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y) = x^2 + 9y^2$ und $g(x, y) = 4x^2 + y^2$. Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 1$.

Aufgabe 6 *(2+2+1+3+2)*

Gegeben seien das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \qquad c(t) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\sin(t), 2\cos(t)\right).$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c < f(X), dX > .$$

b) Begründen Sie, wieso Wegintegrale zweiter Art über $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix}$$

wegunabhängig sind und berechnen Sie

$$\int_\gamma < h(X), dX >,$$

wobei γ ein Weg ist, der von $(1, 1, 1)$ nach $(3, 2, 4)$ läuft.

c) Wir betrachten

$$g(x, y) = \sin(x - y) + 3y - 6x^2 = 0.$$

Wieso existiert in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ eine eindeutige Auflösung $y = y(x)$.

d) Bestimmen Sie dann $y'(0)$ und $y''(0)$ durch implizites Differenzieren.

e) Bestimmen Sie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{1-2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \pi^{n+2}$.