Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(2+2+2+2+2)*

a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = -64.$$

Geben Sie dabei die Lösungen in Polarkoordinaten an.

b) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 8y = 0.$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

e) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Punktes $P = (3, 1, 2)$ auf die Ebene E.

Lösung

a) Eine komplexe Zahl z hat in Polarkoordinaten die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir setzen dies in die Gleichung ein und erhalten

$$r^3 e^{3i\varphi} = -64.$$

Damit muss $r^3 = 64$ und $e^{3i\varphi} = -1$ erfüllt sein. Daraus ergibt sich für φ die Bedingung

$$3i\varphi = i\pi.$$

Daraus erhalten wir $r = 4$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pi$ und $\varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$.
Die Lösungen sind damit

$$z_1 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_2 = 4e^{\pi i}, \quad \text{und} \quad z_3 = 4e^{\frac{5i\pi}{3}}.$$

b) Wir machen den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Dadurch ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 8.$$

Dieses besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -4$.
Damit ist die allgemeine reelle Lösung gegeben durch

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}, \quad \text{mit} \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Sei $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-4t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit der Nebenbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$. Die Nebenbedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem für c_1 und c_2. Dies ist gegeben durch

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{und} \quad -2c_1 - 4c_2 = 1.$$

Lösen des LGS liefert $c_1 = \frac{5}{2}$ und $c_2 = -\frac{3}{2}$.
Damit ist $y(t) = \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-4t}$ die gesuchte Lösung.

d) Wir bestimmen einen Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

indem wir das Skalarprodukt von n mit den beiden Richtungsvektoren gleich 0 setzen und das daraus resultierende lineare Gleichungssystem lösen. Es muss $3v_1 + v_2 = 0$ und $2v_3 = 0$. Für n ergibt sich so beispielsweise

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. normiert} \quad n = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalenform ist dann mit dem normierten Normalenvektor n gegeben durch

$$E : \frac{1}{\sqrt{10}} (x_1 - 3x_2) = 0,$$

da der Stützvektor auf der Ebene dem Ursprung entspricht.

e) Der Darstellung der Ebene in der Aufgabenstellung ist anzusehen, dass der Punkt P in der Ebene enthalten ist. Dadurch muss die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die Ebene E gleich dem Punkt P selbst entsprechen.
Alternative: Dies kann aber auch ausführlich berechnet werden. Die Vektoren sind schon orthogonal zueinander, daher müssen diese noch normiert werden. Das Verfahren mit Gram-Schmidt ist nicht notwendig, würde aber auch funktionieren. Es ist

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Orthogonalprojektion ergibt sich so

$$P\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{10}\cdot 10 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(6+4)*

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(x_n)\quad$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{\pi}{2}$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)\cos(x)}{\sin^2(x) - x^4}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sinh(t)}{42+t^{50}}dt$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2+8x+15}dx.$$

Lösung

a) i) Da die cos-Funktion stetig ist, kann der Grenzwert in die Funktion hineingezogen werden. Um herauszufinden, wogegen x_n für $n\to\infty$ konvergiert, nehmen wir an, dass der Grenzwert x^* sei. Dann muss $x^* = \frac{1}{2}x^* - \frac{\pi}{2}$ gelten und somit $x^* = -\pi$.

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty}(\cos(x_n)) = \cos(\lim_{n\to\infty} x_n) = \cos(-\pi) = -1.$$

ii) Wir wenden die Regel von L'Hopital zweimal an

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)\cos(x)}{\sin^2(x)-x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)2x\cos(x) - \sin(x^2)(\sin(x))}{2\sin(x)\cos(x) - 4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin(x^2)(4x^2)\cos(x) + \cos(x^2)2\cos(x) - \cos(x^2)2x\sin(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) - 12x^2}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{-\cos(x^2)2x(\sin(x)) - \sin(x^2)\cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) - 12x^2}\right)\\ &= \frac{2}{2} = 1.\end{aligned}$$

iii) Mit der Regel von L'Hopital und dem Fundamentalsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{\sinh(t)}{42+t^{50}}dt = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\,\frac{\sinh(x)}{42+x^{50}}.$$

Wir wenden erneut die Regel von L'Hopital an und bekommen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{84x + 2x^51} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)}{84 + 102x^{50}} = \frac{1}{84}.$$

b) Wir benutzen dazu die Partialbruchzerlegung. Die Nullstellen des Nennerpolynoms $x^2+8x+15$ sind $x_1 = -3$ und $x_2 = -5$.
Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2 + 8x + 15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}.$$

Daraus folgt

$$1 = A(x + 5) + B(x + 3)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $x = -3$ und $x = -5$ liefert $A = \frac{1}{2}$ und $B = -\frac{1}{2}$.
Damit ist

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 8x + 15} dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+3} dx - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x+5} dx = \frac{1}{2}[\ln(|x + 3|)]_2^3 - \frac{1}{2}[\ln(|x + 5|)]_2^3$$
$$= \frac{1}{2}\ln(6) - \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(8) + \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{42}{40}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{21}{20}\right).$$

Aufgabe 3 *(2+3+1+1+3)*

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A an.

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an und begründen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $D = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Bestimmen Sie die allgemeine, reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$.

e) Um welche Art von Quadrik handelt es sich bei $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^T Ax = 3\}$.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (6 - \lambda)\det\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right) = (6 - \lambda)\left((5 - \lambda)^2 - 25\right)$$
$$= (6 - \lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 25) = -60\lambda - 16\lambda^2 - \lambda^3 = (6 - \lambda)\lambda(\lambda - 10).$$

b) Für die Eigenwerte muss $p_A(\lambda) = 0$ gelten. Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 10.$$

Da die Matrix symmetrisch ist, stehen die Eigenräume direkt orthogonal aufeinander. Es genügt also die normierten Eigenvektoren zu bestimmen und sie nicht über Gram-Schmidt zu einer Orthonormalbasis zu erweitern.

- Der Eigenvektor zu $\lambda = 0$ berechnet sich durch $(A - 0I)v_1 = 0$ und ist $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Der Eigenvektor zu $\lambda = 6$ ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Der Eigenvektor zu $\lambda = 10$ ist $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Da in b) schon eine ONB an Eigenvektoren bestimmt wurde, sieht die Transformationsmatrix S folgendermaßen aus

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

d) Die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich direkt durch die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{10t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

e) Um die Art der Quadrik zu bestimmen, bringen wir $x^T A x = 3$ auf die Normalform. Sei dazu $x = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^T A x &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a - 5c & 6b & -5a + 5c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= 5a^2 - 5ac + 6b^2 - 5ac + 5c^2 = 3. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{5}{3}(a-c)^2 + 2b^2 = 1,$$

was einem elliptischem Zylinder entspricht.
Alternative: Dies kann auch direkt über die Diagonalisierung aus der $c)$ gesehen werden.
für die Normalform $6x^2 + 10y^2 = 3$ und für die Quadrik Benennung.

Aufgabe 4 *(2+2+2+4)*

Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} x^{2n}$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(0), f'(0), f''(0)$ und $f^{(303)}(0)$.

c) Überprüfen Sie, ob Konvergenz in den Randwerten $x = R$ und $x = -R$ vorliegt.

d) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \, \frac{1}{1+x^2} dx$$

konvergent ist.
Hinweis: Spalten Sie dazu das Integral auf in $\int_0^1 ...dx + \int_1^{\infty} ...dx$.

Lösung:

a) Um den Konvergenzradius R zu berechnen, setzen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$. Dann ergibt sich der Konvergenzradius durch den Quotienten

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n}{1+n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{1+(n+1)}}\right| \qquad = \left|\frac{n+2}{n+1}\right|.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen den Konvergenzradius $R = 1$.

b) Die Taylorreihe von f im Punkt $x = 0$ ist allgemein

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der Potenzreihe ergibt sich

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{1+n}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= -\frac{1}{2}(2!) = -1, \\ f^{(100)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

c) Für $x = R = 1$ ergibt sich die Potenzreihe

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} 1^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}.$$

Es ist $\left(\frac{(-1)^n}{1+n}\right)_{n\geq 0}$ alternierend und die Folge $\left(\frac{1}{1+n}\right)_{n\geq 0}$ ist eine monoton fallende, reelle Nullfolge. Somit konvergiert die Potenzreihe nach dem Leibniz-Kriterium.
Für $x = -R = -1$ haben wir die Potenzreihe

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n},$$

was der gleichen Potenzreihe wie zuvor entspricht und somit ebenfalls konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Somit konvergiert die Potenzreihe nach dem Leibniz-Kriterium. Sie konvergiert aber auch absolut nach der Berechnung für $x = R$.

d) Nach dem Hinweis spalten wir das Integral in

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx = I_1 + I_2.$$

- Für $x \in [0,1]$ kann $\frac{1}{1+x^2}$ durch 1 abgeschätzt werden.
  Es ist damit

  $$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 < \infty.$$

- Für $1 \leq x \leq \infty$ gilt $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$.
  Somit erhalten wir

  $$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+x^2} dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty.$$

  Für I_1 und I_2 existieren somit obere Grenzen und dadurch ist das Integral konvergent nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 5 *(1+1+2+2+4)*

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=\sin(x^2+xy+x^7y^5).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

d) Geben Sie für f das Taylorpolynom T_3 der dritten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ an.

e) Gegeben seien die Funktionen $h,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $h(x,y)=x^2+9y^2$ und $g(x,y)=4x^2+y^2$. Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y)=1$.

Lösung

a) Der Gradient ist

$$\mathrm{grad}f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(x^2+xy+x^7y^5)(2x+y+7x^6y^5)\\ \cos(x^2+xy+x^7y^5)(x+5x^7y^4)\end{pmatrix}^T.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f&=-\sin(x^2+xy+x^7y^5)(2x+y+7x^6y^5)^2+\cos(x^2+xy+x^7y^5)(2+42x^5y^5),\\ \partial_{xy}f&=-\sin(x^2+xy+x^7y^5)(2x+y+7x^6y^5)(x+5x^7y^4)+\cos(x^2+xy+x^7y^5)(1+35x^6y^4)=\partial_{yx}f,\\ \partial_y^2 f&=-\sin(x^2+xy+x^7y^5)(x+5x^7y^4)^2+\cos(x^2+xy+x^7y^5)(20x^7y^3).\end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x^2 f & \partial_{xy}f\\ \partial_{yx}f & \partial_y^2 f\end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt $(0,0)$:

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

c) Es ist $\mathrm{grad}f(0,0)=0$. Somit liegt bei $(0,0)$ ein kritischer Punkt vor.
Für die Determinante von $H_f(0,0)$ gilt

$$\det(H_f(0,0))=-1<0.$$

Somit liegt nach dem Hurwitz-Kriterium ein Sattelpunkt in $(0,0)$ vor.
Alternative: Es können auch die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ berechnet werden, wodurch die Matrix indefinit ist, da diese verschiedene Vorzeichen haben. Somit muss ebenso ein Sattelpunkt vorliegen.

d) Das Taylorpolynom T_3 der dritten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ ist gleich

$$T_3(f,(x,y),(0,0)) = x^2 + xy,$$

da alle anderen Terme von höherer Ordnung sind. Wenn $x = 0$ und $y = 0$ eingesetzt wird, so verschwinden alle Ableitungen von diesen.

e) – Es ist $Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 8x & 2y \end{pmatrix}$. Also gilt $\text{Rang}(Jg(x,y)) \neq 1$ genau dann, wenn $x = y = 0$ gilt. Da $g(0,0) = 0 \neq 1$ ist, folgt $\text{Rang}(Jg(x,y)) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = 1$. Somit können alle Punkte, in denen h ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ annimmt, mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes berechnet werden.

– Das bedeutet, alle Extremstellen sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

Das ergibt die folgenden Bedingungen

$$2x + 8\lambda x = 0, \qquad (1)$$

$$18y + 2\lambda y = 0, \qquad (2)$$

$$4x^2 + y^2 = 1. \qquad (3)$$

– Aus (1) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{4}$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = -9$. Deswegen muss $x = 0$ oder $y = 0$ gelten. Ist $x = 0$, so folgt aus (3), dass $y = \pm 1$ gilt.
Wenn $y = 0$ ist, so muss nach (3) gelten, dass $x = \pm\frac{1}{2}$ ist. Die Extremstellen unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind somit $(0,\pm 1)$ und $(\pm\frac{1}{2}, 0)$.

– Einsetzen der Extremstellen in die Funktion h liefert

$$h(0,\pm 1) = 9 \quad \text{und} \quad h(\pm\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}.$$

Der maximale Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ beträgt somit 9. Der minimale Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ beträgt somit $\frac{1}{4}$.

Aufgabe 6 *(2+2+1+3+2)*

Gegeben seien das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}, \qquad c(t) = (\frac{\pi}{2}, 2\sin(t), 2\cos(t)).$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c < f(X), dX > .$$

b) Begründen Sie, wieso Wegintegrale zweiter Art über $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x \\ \sin(y) \\ \cos(z) \end{pmatrix}$$

wegunabhängig sind und berechnen Sie

$$\int_\gamma < h(X), dX >,$$

wobei γ ein Weg ist, der von $(1,1,1)$ nach $(3,2,4)$ läuft.

c) Wir betrachten

$$g(x,y) = \sin(x-y) + 3y - 6x^2 = 0.$$

Wieso existiert in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ eine eindeutige Auflösung $y = y(x)$.

d) Bestimmen Sie dann $y'(0)$ und $y''(0)$ durch implizites Differenzieren.

e) Bestimmen Sie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{1-2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\pi^{n+2}$.

Lösung

a) Es ist

$$\int_c \langle f(X), dX \rangle = \int_0^{2\pi} \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin(t) dt = [2\cos(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

b) Es gilt

$$\operatorname{rot}(h) = \begin{pmatrix} \partial_y h_3 - \partial_z h_2 \\ \partial_z h_1 - \partial_x h_3 \\ \partial_x h_2 - \partial_y h_1 \end{pmatrix} = 0$$

und $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Somit ist das Integral wegunabhängig.
Sei das Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 - \cos(y) + \sin(z)$. Es ist $\nabla\Phi = h$ und somit ist h ein Gradientenfeld und das Integral wegunabhängig. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_c \langle h(X), dX\rangle &= \Phi(3,2,4) - \Phi(1,1,1) = \frac{27}{2} - \cos(2) + \sin(4) - \frac{3}{2} + \cos(1) - \sin(1)\\ &= 12 - \cos(2) + \sin(4) + \cos(1) - \sin(1).\end{aligned}$$

c) Es ist $g(0,0) = 0$ und $\partial_y g(x,y) = -\cos(x-y) + 3 \neq 0$. Somit gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Auflösung $y = y(x)$ in einer Umgebung um den Punkt $(0,0)$.

d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\partial_x g(x,y) &= \cos(x-y) - 12x \quad \Rightarrow \partial_x g(0,0) = 1,\\ \partial_y g(x,y) &= -\cos(x-y) + 3 \quad \Rightarrow \partial_y g(0,0) = 2,\\ \partial_x^2 g(x,y) &= -\sin(x-y) - 12 \quad \Rightarrow \partial_x^2 g(0,0) = -12,\\ \partial_{xy} g(x,y) &= \sin(x-y) \quad \Rightarrow \partial_{xy} g(0,0) = 0,\\ \partial_y^2 g(x,y) &= -\sin(x-y) \quad \Rightarrow \partial_y^2 g(0,0) = 0.\end{aligned}$$

Wir haben

$$\frac{d}{dx} g(x,y(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da die partielle Ableitung von g nach y nie 0 ist, folgt somit

$$y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{\cos(x-y) - 12x}{-\cos(x-y) + 3}.$$

Somit ist $y'(0) = -\frac{1}{2}$.
Für die zweite Ableitung benötigen wir

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} g(x,y(x)) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Es ist

$$0 = -\sin(x-y) - 12 + 2\sin(x-y)y'(x) + (-\sin(x-y))y'(x)^2 + (-\cos(x-y) + 3)y''(x).$$

Für $x = 0$ folgt daher

$$0 = 0 - 12 + 2y''(0)$$

und damit

$$y''(0) = 6.$$

Alternative für die zweite Ableitung: Mit den Formeln ist

$$y''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$y''(0) = -\frac{-\sin(0 - y(0)) - 12 + 2\sin(0 - y(0))y'(x) + (-\sin(0 - y(0)))y'(0)^2}{-\cos(0 - y(0)) + 3} = \frac{12}{2} = 6.$$

e) – Mit der geometrischen Reihe erhalten wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{1-2n} = x\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^n = x\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = x\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

– Mit der Reihendarstellung der e-Funktion gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\pi^{n+2} = \pi^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\pi^n = \pi^2 e^\pi$$

durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.