Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 14 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy)dydx.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^{10} d(x, y)$$
mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids
$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge
$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
an.

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)$$
und
$$\lim_{t\to\infty} x\left(t, x_0\right) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} x\left(t, x_0\right)$$
für $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 3x^3 + 2x^5 - y$$
und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung
$$e^{2x} - ay + (2y\sin(y^2) + (b-1)\cosh x)y' = 0.$$
Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Aufgabe 3 *(3+3+4)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \left(x - 3xy^2z, y^3z, 3z + \exp(y)\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Berechnen Sie das Wegintegral zweiter Art $\oint_C \langle f(X), dX\rangle$ für

$$f(x, y) = \left(e^{\sin\left(x^2\right)} - 3y, e^{\cos(y)} + 2x\right)^T$$

und

$$C = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\right\}$$

mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes der Ebene.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x, y, z) = (3y, -2z + x, yz)^T$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot}F(X), n(X)\rangle\, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt.

Aufgabe 4 *(2+2+1+3+2)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x + iy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i(3x^2y + \alpha y^3)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz$$

und

$$\oint_{|z|=10} (z - 2)^{-1}\, dz.$$

c) Bestimmen Sie

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z)))dz$$

mit kurzer Begründung.

d) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}dz.$$

e) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$