



Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, tpeI

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengерäte.
- In dieser Klausur können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 14 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+3+4+2)

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy) dy dx.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2)^{10} d(x, y)$$

mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids

$$P = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4z \leq 1\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

an.

Lösung

a) Es ist

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^1 x^4 + \frac{1}{2} x^5 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{12} x^6 \right]_{x=0}^1 = \frac{17}{60}.$$

b) Wir verwenden Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

mit $r \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2)^{10} d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^{21} dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{22} r^{22} \right]_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{22} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{22} = \frac{\pi}{44}. \end{aligned}$$

c) Wir führen Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ ein. Damit ist $x^2 + y^2 = r^2$ und $r^2 \leq 4z \leq 1$ bzw. $r^2/4 \leq z \leq 1/4$. Für den Schwerpunkt gilt die Formel

$$S(P) = \frac{\int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)}{\int_P 1 d(x, y, z)}.$$

Wir berechnen daher zunächst das Volumen des Rotationsparaboloids. Es gilt

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_P 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r dz d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 [rz]_{z=r^2/4}^{1/4} dr = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 (r - r^3) dr \\ &= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die Integrale über die Komponenten berechnet werden. Da ein Rotationsparaboloid rotationssymmetrisch zur z -Achse ist, muss der Schwerpunkt auf der z -Achse liegen und somit die x - und y -Komponente gleich 0 sein. Dies kann auch schnell nachgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \int_P x d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r^2 \cos(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi) (1 - r^2) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^2) \sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_P y d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r^2 \sin(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) (1 - r^2) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^2)(-\cos(\varphi))]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_P z d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r z dz d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r z^2 \right]_{z=r^2/4}^{1/4} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{8}\pi \int_0^1 \frac{1}{2} (r - r^5) dr = \frac{1}{8}\pi \left[\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{12}r^6 \right]_{r=0}^1 = \frac{1}{8}\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

Damit ist der Schwerpunkt von P gegeben durch

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

d) Wir sehen in S , dass die y -Komponente durch x und die z -Komponente durch x und y ausgedrückt werden können. Die Normalbereichsdarstellung von S ergibt sich durch

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}; -\sqrt{10-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{10-x^2-y^2}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+3+4)

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0)$$

für $x_0 = \frac{1}{2}$.

- b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3x^3 + 2x^5 - y$$

und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

- c) Gegeben ist die von den Parametern
- $a, b \in \mathbb{R}$
- abhängige Differentialgleichung

$$e^{2x} - ay + (2y \sin(y^2) + (b-1) \cosh x)y' = 0.$$

Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.**Lösung**

- a) Damit ein Fixpunkt vorliegt, muss
- $\frac{dx}{dt} = \sin(x) \stackrel{!}{=} 0$
- gelten. Dies liefert
- $x_n^* = \pi n$
- für
- $n \in \mathbb{Z}$
- . Wegen
- $\frac{d}{dx} \sin(x)|_{x=(2k+1)\pi} < 0$
- und
- $\frac{d}{dx} \sin(x)|_{x=2k\pi} > 0$
- für
- $k \in \mathbb{Z}$
- sind
- x_{2k+1}^*
- stabil und
- x_{2k}^*
- instabil.

Daher gelten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, x_0) = 0$$

für $x_0 = \frac{1}{2}$.

- b) Die Fixpunktbedingung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ x - 3x^3 + 2x^5 - y \end{pmatrix}.$$

Damit muss $y = 0$ und $x - 3x^3 + 2x^5 = 0$ gelten und somit $P_1 = (0, 0)$, $P_{2/3} = (\pm 1, 0)$ und $P_{4/5} = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Die Linearisierung ist

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 9(x^*)^2 + 10(x^*)^4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Linearisierung um P_1 : Die Eigenwerte von

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da ein positiver Eigenwert existiert ist P_1 linear sowie nichtlinear instabil.

Linearisierung um $P_{2/3}$: Die Eigenwerte von

$$A(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$. Da ein positiver Eigenwert existiert sind $P_{2/3}$ linear sowie nichtlinear instabil.

Linearisierung um $P_{4/5}$: Die Eigenwerte von

$$A(P_{4/5}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Da $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$ gilt, sind $P_{4/5}$ linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

- c) Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss für $g(x, y) = e^{2x} - ay$ und $h(x, y) = 2y \sin(y^2) + (b - 1) \cosh x$ folgende Bedingung gelten

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (1)$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -a \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = (b - 1) \sinh x.$$

Für $a = 0$ und $b = 1$ ist die Bedingung immer erfüllt.

Für das Potential Φ mit $a = 0$ und $b = 1$ muss $\frac{d\Phi(x, y(x))}{dx} = g$ und $\frac{d\Phi(x, y(x))}{dy} = h$ gelten. Aus der ersten Bedingung können wir auf

$$\Phi(x, y) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C(y)$$

schließen, wobei $C(y)$ eine Funktion ist, die nur von y abhängt. Mit der zweiten Bedingung kommen wir auf

$$\partial_y \Phi(x, y) = C'(y) \stackrel{!}{=} 2y \sin(y^2).$$

Per Substitution $u = y^2 \rightsquigarrow dy = \frac{du}{2y}$ erhalten wir

$$C(y) = \int 2y \sin(y^2) dy = \int \sin(u) du = -\cos(y^2) + \tilde{C},$$

mit Integrationskonstante $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Damit ist das Potential gegeben durch

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} e^{2x} - \cos(y^2) + \tilde{C}.$$

Aufgabe 3 (3+3+4)

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (x - 3xy^2z, y^3z, 3z + \exp(y))^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

mit Hilfe des Gaussischen Integralsatzes.

b) Berechnen Sie das Wegintegral zweiter Art $\oint_C \langle f(X), dX \rangle$ für

$$f(x, y) = (e^{\sin(x^2)} - 3y, e^{\cos(y)} + 2x)^T$$

und

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$$

mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes der Ebene.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z, 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(x, y, z) = (3y, -2z + x, yz)^T$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \operatorname{rot} F(X), n(X) \rangle d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z -Richtung zeigt.

Lösung

a) Es ist

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = (1 - 3y^2z) + 3y^2z + 3 = 4.$$

Da Ω ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und f ein C^1 -Vektorfeld ist, ergibt sich mit dem Gaussischen Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} f(x, y, z) d(x, y, z) = 4 \int_{\Omega} d(x, y, z) = 4 \operatorname{Vol}(\Omega).$$

Das Volumen einer Kugel mit Radius $\sqrt{2}$ beträgt $\frac{4}{3}\sqrt{2}^3\pi = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$ bzw.

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(\Omega) &= \int_{\Omega} 1 d(x, y, z) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr = 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\sqrt{2}} [-\cos(\theta)]_0^{\pi} \\ &= 2\pi \frac{2\sqrt{2}}{3} (1 + 1) = \frac{8\sqrt{2}}{3} \pi \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma = \frac{32}{3} \sqrt{2}\pi.$$

b) Es ist

$$\operatorname{rot} f(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2 - (-3) = 5.$$

Sei $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Dann ist K C^1 -berandet mit $C = \partial K$. Da K ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und f ein C^1 -Vektorfeld ist, ergibt sich mit dem Greenschen Integralsatz

$$\oint_C \langle f(X), dX \rangle = \int_K \operatorname{rot} f(x, y) d(x, y) = 5 \int_K d(x, y).$$

Die Fläche eines Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ beträgt 2π bzw. mit Rechnung

$$\int_K 1 d(x, y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

und damit

$$\oint_C \langle f(X), dX \rangle = 10\pi.$$

c) Aus dem Satz von Stokes folgt

$$I = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle.$$

Der Rand der Menge M ist gegeben durch

$$\partial M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 2\}.$$

Eine geeignete Parametrisierung des Randes ist

$$\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow \partial M, \varphi \rightarrow (2 \cos(\varphi), 2 \sin(\varphi), 2)^T.$$

Der Tangentialvektor in den Randpunkten ist

$$\dot{\gamma} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi \rightarrow (-2 \sin(\varphi), 2 \cos(\varphi), 0)^T.$$

Damit können wir das Integral berechnen

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\varphi)), \dot{\gamma}(\varphi) \rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 6 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) - 4 \\ 4 \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin(\varphi) \\ 2 \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2(\varphi) + 4 \cos^2(\varphi) - 8 \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (4 - 16 \sin^2(\varphi) - 8 \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (4 - 8(1 - \cos(2\varphi)) - 8 \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= -8\pi, \end{aligned}$$

wobei wir $\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varphi))$ verwendet haben.

Alternative: Wir berechnen

$$\operatorname{rot}F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Parametrisierung von M ist gegeben durch

$$\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2] \rightarrow M, (\varphi, r) \rightarrow \left(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), \frac{r^2}{2} \right)^T.$$

Die Tangentialvektoren an $(x, y) = \Phi(\varphi, r) \in M \setminus (0, 0)$ sind gegeben durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\varphi, r) = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man das normierte Einheitsnormalenvektorfeld

$$n(r, \varphi) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r\sqrt{1+r^2}} \begin{pmatrix} r^2 \cos(\varphi) \\ r^2 \sin(\varphi) \\ -r \end{pmatrix}.$$

Da der Normalenvektor $n(r, \varphi)$ in positive z -Richtung zeigen soll, benutzen wir

$$n(r, \varphi) = -\frac{1}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\|} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).$$

Damit kann I berechnet werden

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^2 + 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r^2 \cos(\varphi) \\ -r^2 \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}r^4 \cos(\varphi) - 2r^2 \cos(\varphi) - 2r \right) dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -2r dr d\varphi = 2\pi \left[-r^2 \right]_{r=0}^2 = -8\pi, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx = 0$.

Aufgabe 4 (2+2+1+3+2)

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y + \alpha y^3)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz$$

und

$$\oint_{|z|=10} (z - 2)^{-1} dz.$$

c) Bestimmen Sie

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z))) dz$$

mit kurzer Begründung.

d) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z - 1)^2(z + 5)} dz.$$

e) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Lösung

a) Es seien $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ und $v(x, y) = 3x^2y + \alpha y^3$. Wir überprüfen die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Abhängigkeit von α . Die Bedingung lautet

$$\partial_x u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \stackrel{!}{=} 3x^2 + 3\alpha y^2 = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = -6xy \stackrel{!}{=} -6xy = -\partial_x v(x, y).$$

Damit ist f für $\alpha = -1$ komplex differenzierbar.

b) Für das erste Integral verwenden wir die Parametrisierung $z = 4e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Damit erhalten wir

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz = \int_0^{2\pi} 4^{-4} e^{-4it} \cdot 4ie^{it} dt = \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} ie^{-3it} dt = 0.$$

Alternativ: Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = 1$ an. Da f holomorph ist und $|0| < 4$, erhalten wir

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = 0.$$

Für das zweite Integral nutzen wir die Cauchysche Integralformel mit $f(z) = 1$. Da f holomorph ist und $|2| < 10$, erhalten wir

$$\oint_{|z|=10} (z - 2)^{-1} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i.$$

- c) Der Integrand ist als Verknüpfung holomorpher Funktionen wieder holomorph. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, dass

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z))) dz = 0.$$

- d) Wegen $|5| > 2$ ist $z^* = 1$ die einzige relevante Singularität des Integranden f . Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f(z); 1).$$

Da es sich bei z^* um eine doppelte Polstelle handelt, ergibt sich

$$\text{Res}(f(z); 1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z+5} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + 10z}{(z+5)^2} = \frac{11}{36}$$

und folglich

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)} dz = \frac{11}{18} \pi i.$$

Alternativ: Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = \frac{z^2}{z+5}$ an. Da f im Inneren des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereich holomorph ist, erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(1) = 2\pi i \cdot \left. \frac{z^2 + 10z}{(z+5)^2} \right|_{z=1} = \frac{11}{18} \pi i.$$

- e) Der erste Summand konvergiert nach der geometrischen Reihe für $|x| < 1$. Der zweite Summand konvergiert nach der geometrischen Reihe für $|x/2| > 1$, d.h. $|x| > 2$.

Da diese zwei Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können, ist der Konvergenzbereich gerade die leere Menge \emptyset .