Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen

kyb, mecha, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy)dydx.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^{10} d(x, y)$$
mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids
$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge
$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
an.

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)$$
und
$$\lim_{t\to\infty} x\,(t, x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} x\,(t, x_0)$$
für $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 3x^3 + 2x^5 - y$$
und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung
$$e^{2x} - ay + (2y\sin(y^2) + (b - 1)\cosh x)y' = 0.$$
Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Aufgabe 3 *(3+3+4)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = \left(x - 3xy^2z, y^3z, 3z + \exp(y)\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Berechnen Sie das Wegintegral zweiter Art $\oint_C \langle f(X), dX \rangle$ für

$$f(x,y) = \left(e^{\sin\left(x^2\right)} - 3y, e^{\cos(y)} + 2x\right)^T$$

und

$$C = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 2\right\}$$

mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes der Ebene.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x,y,z) = (3y, -2z + x, yz)^T$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X) \rangle \, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt.

Aufgabe 4 *(2+2+1+3+2)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x + iy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i(3x^2y + \alpha y^3)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz$$

und

$$\oint_{|z|=10} (z-2)^{-1} \, dz.$$

c) Bestimmen Sie

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z)))dz$$

mit kurzer Begründung.

d) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}dz.$$

e) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Aufgabe 5 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation $w = f(z)$ mit

$$f(-1) = -i, \qquad f(0) = 1, \qquad f(1) = i$$

und das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{16+x^4}dx.$$

c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{3+2\sin(t)}{5+4\cos(t)}dt.$$

Aufgabe 6 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 0), \\ 3, & x \in [0, 5), \\ -1, & x \in [5, \infty). \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_{|z|=1} \operatorname{Re}(z)dz.$$

Wieso ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar? Welchen Wert hat $\int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z)dz$?

c) Betrachten Sie die lineare Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi}$$

auf dem Gebiet $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ r \in [0, 1)\}$ mit Neumann-Randbedingungen $\partial_r u = 0$ für $r = 1$. Machen Sie den Ansatz $u(r, \varphi, t) = v(t)Y(\varphi)Z(r)$ und leiten Sie Differentialgleichungen für v, Y und Z her.