Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen

kyb, mecha, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy) dy dx.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^{10} d(x, y)$$
mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationsparaboloids
$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge
$$S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
an.

Lösung

a) Es ist
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2} x y^2\right]_{y=0}^{x^2} dx = \int_0^1 x^4 + \frac{1}{2} x^5 dx = \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{12} x^6\right]_{x=0}^1 = \frac{17}{60}.$$

b) Wir verwenden Polarkoordinaten
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$
mit $r \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und erhalten
$$\begin{aligned} \int_\Omega (x^2 + y^2)^{10} d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^{21} dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{22} r^{22}\right]_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{22} d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{22} = \frac{\pi}{44}. \end{aligned}$$

c) Wir führen Zylinderkoordinaten
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ ein. Damit ist $x^2 + y^2 = r^2$ und $r^2 \leq 4z \leq 1$ bzw. $r^2/4 \leq z \leq 1/4$. Für den Schwerpunkt gilt die Formel

$$S(P) = \frac{\int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x,y,z)}{\int_P 1 d(x,y,z)}.$$

Wir berechnen daher zunächst das Volumen des Rotationsparaboloids. Es gilt

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_P 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r dz d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 [rz]_{z=r^2/4}^{1/4} dr = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 (r - r^3) dr \\ &= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die Integrale über die Komponenten berechnet werden. Da ein Rotationsparaboloid rotationssymmetrisch zur z-Achse ist, muss der Schwerpunkt auf der z-Achse liegen und somit die x- und y-Komponente gleich 0 sein. Dies kann auch schnell nachgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \int_P x d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} r^2 \cos(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi)(1 - r^2) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^2)\sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_P y d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{1} r^2 \sin(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi)(1 - r^2) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^2)(-\cos(\varphi))]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_P z d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/4}^{1/4} rz dz d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}rz^2\right]_{z=r^2/4}^{1/4} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{8}\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(r - r^5) dr = \frac{1}{8}\pi \left[\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{12}r^6\right]_{r=0}^1 = \frac{1}{8}\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\pi}{48}. \end{aligned}$$

Damit ist der Schwerpunkt von P gegeben durch

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\frac{\pi}{48}}{\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

d) Wir sehen in S, dass die y-Komponente durch x und die z-Komponente durch x und y ausgedrückt werden können. Die Normalbereichsdarstellung von S ergibt sich durch

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\ &= \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; -\sqrt{10 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{10 - x^2 - y^2}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \sin(x)$$

und

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} x(t, x_0)$$

für $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - 3x^3 + 2x^5 - y$$

und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$e^{2x} - ay + (2y\sin(y^2) + (b-1)\cosh x)y' = 0.$$

Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Lösung

a) Damit ein Fixpunkt vorliegt, muss $\frac{dx}{dt} = \sin(x) \stackrel{!}{=} 0$ gelten. Dies liefert $x_n^* = \pi n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Wegen $\frac{d}{dx}\sin(x)\big|_{x=(2k+1)\pi} < 0$ und $\frac{d}{dx}\sin(x)\big|_{x=2k\pi} > 0$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind $x^*_{(2k+1)\pi}$ stabil und x^*_{2k} instabil.

Daher gelten

$$\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = \pi, \quad \lim_{t\to-\infty} x(t, x_0) = 0$$

für $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Die Fixpunktbedingung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ x - 3x^3 + 2x^5 - y \end{pmatrix}.$$

Damit muss $y = 0$ und $x - 3x^3 + 2x^5 = 0$ gelten und somit $P_1 = (0,0)$, $P_{2/3} = (\pm 1, 0)$ und $P_{4/5} = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Die Linearisierung ist

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 9(x^*)^2 + 10(x^*)^4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Linearisierung um P_1: Die Eigenwerte von

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da ein positiver Eigenwert existiert ist P_1 linear sowie nichtlinear instabil.

Linearisierung um $P_{2/3}$: Die Eigenwerte von

$$A(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm 3}{2}$. Da ein positiver Eigenwert existiert sind $P_{2/3}$ linear sowie nichtlinear instabil.

Linearisierung um $P_{4/5}$: Die Eigenwerte von

$$A(P_{4/5}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Da $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$ gilt, sind $P_{4/5}$ linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

c) Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss für $g(x,y) = e^{2x} - ay$ und $h(x,y) = 2y\sin(y^2) + (b-1)\cosh x$ folgende Bedingung gelten

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1}$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -a \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = (b-1)\sinh x.$$

Für $a = 0$ und $b = 1$ ist die Bedingung immer erfüllt.
Für das Potential Φ mit $a = 0$ und $b = 1$ muss $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dx} = g$ und $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dy} = h$ gelten. Aus der ersten Bedingung können wir auf

$$\Phi(x,y) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C(y)$$

schließen, wobei $C(y)$ eine Funktion ist, die nur von y abhängt. Mit der zweiten Bedingung kommen wir auf

$$\partial_y \Phi(x,y) = C'(y) \overset{!}{=} 2y\sin(y^2).$$

Per Substitution $u = y^2 \rightsquigarrow dy = \frac{du}{2y}$ erhalten wir

$$C(y) = \int 2y\sin(y^2)dy = \int \sin(u)du = -\cos(y^2) + \widetilde{C},$$

mit Integrationskonstante $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$. Damit ist das Potential gegeben durch

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x} - \cos(y^2) + \widetilde{C}.$$

Aufgabe 3 *(3+3+4)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \left(x - 3xy^2 z, y^3 z, 3z + \exp(y)\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Berechnen Sie das Wegintegral zweiter Art $\oint_C \langle f(X), dX \rangle$ für

$$f(x, y) = \left(e^{\sin\left(x^2\right)} - 3y, e^{\cos(y)} + 2x\right)^T$$

und

$$C = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\right\}$$

mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes der Ebene.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ 0 \leq z \leq 2\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(x, y, z) = (3y, -2z + x, yz)^T$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X) \rangle \, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt.

Lösung

a) Es ist

$$\mathrm{div} f(x, y, z) = (1 - 3y^2 z) + 3y^2 z + 3 = 4.$$

Da Ω ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und f ein C^1-Vektorfeld ist, ergibt sich mit dem Gaussschen Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma = \int_\Omega \mathrm{div} f(x, y, z) d(x, y, z) = 4 \int_\Omega d(x, y, z) = 4\mathrm{Vol}(\Omega).$$

Das Volumen einer Kugel mit Radius $\sqrt{2}$ beträgt $\frac{4}{3}\sqrt{2}^3\pi = \frac{8}{3}\sqrt{2}\pi$ bzw.

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1 d(x, y, z) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr = 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^{\sqrt{2}} [-\cos(\theta)]_0^{\pi}$$
$$= 2\pi \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + 1) = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$$

und damit ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma = \frac{32}{3}\sqrt{2}\pi.$$

b) Es ist

$$\operatorname{rot} f(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial_x} - \frac{\partial f_1}{\partial_y} = 2 - (-3) = 5.$$

Sei $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Dann ist K C^1-berandet mit $C = \partial K$. Da K ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und f ein C^1-Vektorfeld ist, ergibt sich mit dem Greenschen Integralsatz

$$\oint_C \langle f(X), dX \rangle = \int_K \operatorname{rot} f(x,y) d(x,y) = 5 \int_K d(x,y).$$

Die Fläche eines Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ beträgt 2π bzw. mit Rechnung

$$\int_K 1 d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi [\frac{1}{2} r^2]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi$$

und damit

$$\oint_C \langle f(X), dX \rangle = 10\pi.$$

c) Aus dem Satz von Stokes folgt

$$I = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle .$$

Der Rand der Menge M ist gegeben durch

$$\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z = 2\}.$$

Eine geeignete Parametrisierung des Randes ist

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \partial M, \varphi \to (2\cos(\varphi), 2\sin(\varphi), 2)^T.$$

Der Tangentialvektor in den Randpunkten ist

$$\dot{\gamma} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \varphi \to (-2\sin(\varphi), 2\cos(\varphi), 0)^T.$$

Damit können wir das Integral berechnen

$$\begin{aligned}
I = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\varphi)), \dot{\gamma}(\varphi) \rangle d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 6\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) - 4 \\ 4\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -12\sin^2(\varphi) + 4\cos^2(\varphi) - 8\cos(\varphi)) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 4 - 16\sin^2(\varphi) - 8\cos(\varphi) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 4 - 8(1 - \cos(2\varphi)) - 8\cos(\varphi) d\varphi \\
&= -8\pi,
\end{aligned}$$

wobei wir $\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi))$ verwendet haben.

Alternativ: Wir berechnen

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Die Parametrisierung von M ist gegeben durch

$$\Phi : [0,2\pi) \times [0,2] \to M, (\varphi, r) \to \left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), \frac{r^2}{2}\right)^T.$$

Die Tangentialvektoren an $(x,y) = \Phi(\varphi, r) \in M \setminus (0,0)$ sind gegeben durch

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}(\varphi,r) = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man das normierte Einheitsnormalenvektorfeld

$$n(r,\varphi) = \frac{1}{\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial r}\|}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix} r^2\cos(\varphi) \\ r^2\sin(\varphi) \\ -r \end{pmatrix}.$$

Da der Normalenvektor $n(r,\varphi)$ in positive z-Richtung zeigen soll, benutzen wir

$$n(r,\varphi) = -\frac{1}{\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial r}\|}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right).$$

Damit kann I berechnet werden

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r^2+2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r^2\cos(\varphi) \\ -r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}r^4\cos(\varphi) - 2r^2\cos(\varphi) - 2r\right) dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -2r dr d\varphi = 2\pi\left[-r^2\right]_{r=0}^2 = -8\pi, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\int_0^{2\pi}\cos(x)dx = 0$.

Aufgabe 4 *(2+2+1+3+2)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x+iy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i(3x^2y + \alpha y^3)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz$$

und

$$\oint_{|z|=10} (z-2)^{-1}\, dz.$$

c) Bestimmen Sie

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z))) dz$$

mit kurzer Begründung.

d) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)} dz.$$

e) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Lösung

a) Es seien $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ und $v(x,y) = 3x^2y + \alpha y^3$. Wir überprüfen die Gültigkeit der Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen in Abhängigkeit von α. Die Bedingung lautet

$$\partial_x u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \overset{!}{=} 3x^2 + 3\alpha y^2 = \partial_y v(x,y), \quad \partial_y u(x,y) = -6xy \overset{!}{=} -6xy = -\partial_x v(x,y).$$

Damit ist f für $\alpha = -1$ komplex differenzierbar.

b) Für das erste Integral verwenden wir die Parametrisierung $z = 4e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Damit erhalten wir

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz = \int_0^{2\pi} 4^{-4} e^{-4it} \cdot 4ie^{it}\, dt = \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} ie^{-3it}\, dt = 0.$$

Alternativ: Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = 1$ an. Da f holomorph ist und $|0| < 4$, erhalten wir

$$\oint_{|z|=4} z^{-4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = 0.$$

Für das zweite Integral nutzen wir die Cauchysche Integralformel mit $f(z) = 1$. Da f holomorph ist und $|2| < 10$, erhalten wir

$$\oint_{|z|=10} (z-2)^{-1}\, dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i.$$

c) Der Integrand ist als Verknüpfung holomorpher Funktionen wieder holomorph. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, dass

$$\oint_{|z|=18} \exp(\cos(\sin(z)))dz = 0.$$

d) Wegen $|5| > 2$ ist $z^* = 1$ die einzige relevante Singularität des Integranden f. Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z);1).$$

Da es sich bei z^* um eine doppelte Polstelle handelt, ergibt sich

$$\operatorname{Res}(f(z);1) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z+5}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+10z}{(z+5)^2} = \frac{11}{36}$$

und folglich

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}dz = \frac{11}{18}\pi i.$$

Alternativ: Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = \frac{z^2}{z+5}$ an. Da f im Inneren des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereich holomorph ist, erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2(z+5)}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(1) \qquad = 2\pi i \cdot \frac{z^2+10z}{(z+5)^2}\Big|_{z=1} = \frac{11}{18}\pi i.$$

e) Der erste Summand konvergiert nach der geometrischen Reihe für $|x| < 1$. Der zweite Summand konvergiert nach der geometrischen Reihe für $|x/2| > 1$, d.h. $|x| > 2$.
Da diese zwei Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können, ist der Konvergenzbereich gerade die leere Menge $\emptyset$.

Aufgabe 5 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation $w = f(z)$ mit

$$f(-1) = -i, \qquad f(0) = 1, \qquad f(1) = i$$

und das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{16+x^4}dx.$$

c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{3+2\sin(t)}{5+4\cos(t)}dt.$$

Lösung:

a) Die Möbiustransformation zu drei gegebenen Punkten berechnet sich über die Formel

$$\frac{(w-w_2)(w_3-w_1)}{(w-w_1)(w_3-w_2)} = \frac{(z-z_2)(z_3-z_1)}{(z-z_1)(z_3-z_2)}$$

mit $f(z_1) = f(-1) = -i = w_1$, $f(z_2) = f(0) = 1 = w_2$ und $f(z_3) = f(1) = i = w_3$. Daraus folgt

$$\frac{(w-1)(i-(-i))}{(w-(-i))(i-1)} = \frac{(z-0)(1-(-1))}{(z-(-1))(1-0)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2i(w-1)}{(w+i)(i-1)} = \frac{2z}{z+1}.$$

Wir multiplizieren jeweils mit dem Nenner und formen um

$$\begin{aligned}
&(2iw-2i)(z+1) = (2z)(iw-1-w-i)\\
&\Rightarrow 2iwz - 2iz + 2iw - 2i = 2izw - 2z - 2zw - 2iz\\
&\Rightarrow w(2z+2i) = -2z + 2i\\
&\Rightarrow w = \frac{-z+i}{z+i} = \frac{iz+1}{-iz+1} = f(z).
\end{aligned}$$

Es ist $f(i) = 0$ und $f(-i) = \infty$. Daher wird die imaginäre Achse auf die reelle Achse abgebildet.

Alternative 1: Eine Möbiustransformation hat die folgende allgemeine Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Über die gegebenen Punkte kann die Möbiustransformation auch über ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten gelöst werden. Es muss

$$\frac{b}{d} = 1, \quad \frac{a+b}{c+d} = i, \quad \frac{-a+b}{-c+d} = -i$$

gelten. Daraus folgt $b = d$, $a = i(c+d) - d$ und $-a + d = ic - id$
bzw. $-i(c+d) + 2d = ic - id$ und somit $c = -id$, $b = d$ und $a = id$. Damit kann zum Beispiel $d = 1$, $b = 1$, $c = -i$ und $a = i$ gewählt werden. Dann ist

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{iz+1}{-iz+1}.$$

Es ist $f(i) = 0$ und $f(-i) = \infty$. Daher wird die imaginäre Achse auf die reelle Achse abgebildet.

Alternative 2: Eine Möbiustransformation hat die folgende allgemeine Form

$$f(z) = \frac{z+b}{cz+d}.$$

Über die gegebenen Punkte kann die Möbiustransformation auch über ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten gelöst werden. Es muss

$$\frac{b}{d} = 1, \quad \frac{-1+b}{-c+d} = -i, \quad \frac{1+b}{c+d} = i$$

gelten. Daraus folgt $b = d$ und $(1 + b) = i(c + d)$ und $(-1 + b) = ic - id$.
Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten $2b = 2ic$ und somit eingesetzt und aufgelöst

$$1 + b = i(1 - i)b \quad \Rightarrow 1 = ib \quad \Rightarrow b = -i.$$

Dadurch ist

$$d = -i \quad \text{und} \quad c = -1.$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{z + b}{cz + d} = \frac{z - i}{-z - i} = \frac{iz + 1}{-iz + 1}.$$

Es ist $f(i) = 0$ und $f(-i) = \infty$. Daher wird die imaginäre Achse auf die reelle Achse abgebildet.

b) Die Nullstellen des Nenners lauten $z_1 = 2e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{3i\pi/4}$, $z_1 = 2e^{5i\pi/4}$ und $z_1 = 2e^{7i\pi/4}$.
Der Grad vom Nennerpolynom ist größer gleich der Grad des Zählerpolynoms + 2. Daher gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{16 + x^4} dx = 2\pi i \sum_{z_1, z_2} \operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{16 + z^4}, z_k\right),$$

da diese die Nullstellen in der oberen Halbebene sind.
Es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{16 + z^4}, z_1\right) = \frac{2z^2}{\frac{d}{dz}(16 + z^4)}|_{z=z_1} = \frac{2z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{i\pi/4}}$$

und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{16 + z^4}, z_2\right) = \frac{2z^2}{\frac{d}{dz}(16 + z^4)}|_{z=z_2} = \frac{2z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{3i\pi/4}}.$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{16 + x^4} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\pi/4}} + \frac{1}{4e^{3i\pi/4}}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i/4} + 1}{4e^{3i\pi/4}}\right) = \frac{1}{2}\pi i \left(\frac{1 + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi i(-i)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi.$$

c) Das Integral liegt in der folgenden Form vor

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 + 2\sin(t)}{5 + 4\cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt.$$

Wir benutzen die Parametrisierung $z = e^{it}$ mit $dt = \frac{dz}{iz}$. Damit können wir das Integral schreiben als

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 + 2\sin(t)}{5 + 4\cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t)) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{3 + 2\frac{z - z^{-1}}{2i}}{5 + 4\frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{3 - i(z - z^{-1})}{5 + 2(z + z^{-1})} \frac{1}{iz} dz$$
$$= \int_{|z|=1} \frac{-iz^2 + 3z + i}{2z^2 + 5z + 2} \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $z_1 = -2,\ z_2 = -\frac{1}{2}$ und $z_3 = 0$. Dabei sind $z_2 = -\frac{1}{2}$ und $z_3 = 0$ relevant, da diese im Einheitskreis liegen. Der Residuensatz liefert

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 + 2\sin(t)}{5 + 4\cos(t)} dt = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; z = 0) + \operatorname{Res}\left(f; z = -\frac{1}{2}\right)\right).$$

Es ist

$$\operatorname{Res}(f(z); 0) = \frac{-iz^2 + 3z + i}{2z^2 + 5z + 2} \frac{1}{i}\Bigg|_{z=0} = \frac{i}{2}\frac{1}{i} = \frac{1}{2}$$

und

$$\operatorname{Res}(f(z); z_1) = \frac{-iz^2 + 3z + i}{2iz(z + 2)}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4} - 3i(-\frac{1}{2}) + 1}{2(-\frac{1}{2})\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - i.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{3 + 2\sin(t)}{5 + 4\cos(t)} dt = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; z = 0) + \operatorname{Res}\left(f; z = -\frac{1}{2}\right)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - i\right) = 2\pi.$$

Aufgabe 6 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, 0), \\ 3, & x \in [0, 5), \\ -1, & x \in [5, \infty). \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_{|z|=1} Re(z) dz.$$

Wieso ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar? Welchen Wert hat $\int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z)dz$?

c) Betrachten Sie die lineare Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi},$$

auf dem Gebiet $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r \in [0, 1)\}$ mit Neumann-Randbedingungen $\partial_r u = 0$ für $r = 1$. Machen Sie den Ansatz $u(r, \varphi, t) = v(t)Y(\varphi)Z(r)$ und leiten Sie Differentialgleichungen für v, Y und Z her.

Lösung:

a) Sei $\varphi \in C_0^\infty$. Die dazugehörige Distribution T_H ist gegeben durch

$$T_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\, dx = 2\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\, dx + 3\int_0^5 \varphi(x)\, dx - \int_5^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Die distributionelle Ableitung der Funktion H ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_H'(\psi) &= -T_H(\varphi') = -2\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - 3\int_0^5 \varphi'(x)\, dx + \int_5^\infty \varphi'(x)\, dx \\ &= -2(\varphi(0) - \varphi(-\infty)) - 3(\varphi(5) - \varphi(0)) + (\varphi(\infty) - \varphi(5)) \\ &= \varphi(0) - 4\varphi(5), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass φ im Unendlichen verschwindet wegen $\varphi \in C_0^\infty$.

b) Für die Parametrisierung $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ des Einheitskreises ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \mathrm{Re}(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cdot ie^{it}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} ie^{it}\, dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} e^{2it} + 1dt = \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2i}e^{2it} + t\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i}(1-1) + 2\pi\right) = \pi i. \end{aligned}$$

Der Cauchysche Integralsatz ist nicht anwendbar, da die Abbildung $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ nirgends holomorph ist.
Wegen $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ ist $\mathrm{Im}(z) = -i(z - \mathrm{Re}(z))$ und damit

$$\int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)\, dz = -i\left(\int_{|z|=1} z\, dz - \int_{|z|=1} \mathrm{Re}(z) dz\right).$$

Das erste Integral verschwindet, da $z \mapsto z$ holomorph ist und der Cauchysche Integralsatz hier nun angewendet kann. Das zweite Integral haben wir bereits berechnet, also ergibt sich

$$\int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)\, dz = -i(0 - i\pi) = -\pi.$$

Alternative für die Berechnung des ersten Integrals: Für die Parametrisierung $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ des Einheitskreises ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \mathrm{Re}(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cdot ie^{it}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} i\cos^2(t) - \cos(t)\sin(t)\, dt \\ &= i\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt}_{=: I_1} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\, dt}_{=: I_2}. \end{aligned}$$

Per partieller Integration erhalten wir für I_1:

$$I_1 = \underbrace{\big[\sin(t)\cos(t)\big]_{t=0}^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(t)\, dt = 2\pi - I_1$$

und folglich $I_1 = \pi$. Das Integral I_2 verschwindet, da der Integrand 2π-periodisch und ungerade ist. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{|z|=1} \mathrm{Re}(z)\, dz = i\pi.$$

Alternative 1 für die Berechnung des zweiten Integrals: Für die Parametrisierung $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ des Einheitskreises ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cdot ie^{it}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} ie^{it}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{2it} - 1 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}e^{2it} - t\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i}(1-1) - 2\pi\right) = -\pi.
\end{aligned}$$

Alternative 2 für die Berechnung des zweiten Integrals: Für die Parametrisierung $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ des Einheitskreises ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)\, dz &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(z(t))\dot{z}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cdot ie^{it}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} i\sin(t)\cos(t) - \sin^2(t)\, dt \\
&= i\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt}_{=: I_1} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt}_{=: I_2}.
\end{aligned}$$

Per partieller Integration erhalten wir für I_2:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = \underbrace{\big[-\sin(t)\cos(t)\big]_{t=0}^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1 - \sin^2(t)\, dt = 2\pi - I_2$$

und folglich $I_2 = \pi$. Das Integral I_1 verschwindet, da der Integrand 2π-periodisch und ungerade ist. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{|z|=1} \mathrm{Re}(z)\, dz = -\pi.$$

c) Einsetzen des Ansatzes ergibt zunächst (Argumente werden weggelassen)

$$v'YZ = vYZ'' + \frac{1}{r}vYZ' + \frac{1}{r^2}vY''Z.$$

Wir dividieren durch $u = vYZ$ und erhalten

$$\frac{v'}{v} = \frac{Z'' + 1/rZ'}{Z} + \frac{1/r^2Y''}{Y}.$$

Da die linke Seite der Gleichung nur von t und die rechte Seite nur von r und φ abhängt, können diese nur konstant sein, d.h. es existiert ein λ_1, so dass

$$\frac{v'}{v} = \lambda_1, \qquad \frac{Z'' + 1/rZ'}{Z} + \frac{1/r^2Y''}{Y} = \lambda_1.$$

Wir multiplizieren die rechte Gleichung mit r^2 und formen um

$$\frac{v'}{v} = \lambda_1, \qquad \left(\frac{r^2 Z'' + rZ'}{Z} - r^2\lambda_1\right) + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Wir sehen, dass der erste Summand der rechten Gleichung nur von r und der zweite Summand nur von φ abhängt. Damit sind beide Summanden konstant, d.h. es existiert ein λ_2, so dass

$$\frac{v'}{v} = \lambda_1, \qquad \frac{r^2 Z'' + rZ'}{Z} - r^2\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -\lambda_2.$$

Daher ergeben sich für v, Y und Z folgende Gleichungen

$$v' = \lambda_1 v, \qquad r^2 Z'' + rZ' = r^2\lambda_1 Z + \lambda_2 Z, \qquad Y'' = -\lambda_2 Y.$$