Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP)
mit Lösungen

15. März 2023

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht bewertet. Bitte unterlassen Sie außerdem die Verwendung von Tipp-Ex oder ähnlichem.
- Bitte geben Sie zu jeder Teilaufgabe einen kurzen Rechenweg oder eine Begründung an. Kürzen bzw. vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.
- Bitten fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.
- Es sind insgesamt 40 Punkte in den **Aufgaben 1-9** erreichbar.

Viel Erfolg!

Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP) mit Lösungen

15. März 2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{n^4 + n^2 + 1}{1 - n^2 - n^4}$

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = -2\mathrm{e}^{2n/(n^2+1)}$

(c) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \dfrac{3 \cdot (n+3)!}{(n^2+1) \cdot (n+1)!}$

(d) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = \dfrac{4n}{n + \cos(n!)}\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$

Lösung.

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)}{n^4\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} - 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} - 1} = -1.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion eine stetige Funktion ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -2\mathrm{e}^0 = -2.$$

(c) Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$c_n = \frac{3 \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!}{(n^2+1) \cdot (n+1)!} = \frac{3 \cdot (n+3) \cdot (n+2)}{n^2+1} = \frac{3(n^2+5n+6)}{n^2+1}.$$

Dementsprechend gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3.$$

(d) Es gilt $d_n = u_n v_n$ mit

$$u_n = \frac{4n}{n + \cos(n!)} \quad \text{und} \quad v_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n\left(1+\frac{\cos(n!)}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+\frac{\cos(n!)}{n}} = 4,$$

denn der Cosinus eine beschränkte Funktion ist. Für v_n benutzen wir den bekannten Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{a}{m}\right)^m = \mathrm{e}^a.$$

Mit der Substitution $m = 2n$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{m\to\infty} \left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e}^{-1}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n = 4\mathrm{e}^{-1}. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{n+1}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n}$

Lösung.

(a) Wegen der Exponentialreihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 5^n}{n!} = 2 \cdot 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = 10\mathrm{e}^5.$$

(b) Wegen der geometrischen Reihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^2}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - 1 = 5 - 1 = 4.$$

$\square$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{ax} - 1 & \text{für } x \leq 0, \\ \dfrac{\sin(3x^2)}{x^2} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

Lösung. (a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} a\mathrm{e}^{ax} - 1 = a\mathrm{e}^{a\cdot 0} - 1 = a - 1.$$

Aus der Regel von de L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x\cos(3x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} 3\cos(3x^2) = 3.$$

(b) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die zwei Grenzwerte übereinstimmen, also wenn $a = 4$. □

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{2e^x - 5}{e^x + 1} \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f von Grad 2 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

(c) Berechnen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x+1) - e^x(2e^x-5)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} + 5e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{7e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

und (wir klammern im Zähler $7e^x(e^x+1)$ aus)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{7e^x(e^x+1)^2 - 2(e^x+1)e^x \cdot 7e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{7e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{7e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \end{aligned}$$

(b) Das Taylorpolynom von Grad 2 an der Entwicklungsstelle 0 ist gegeben durch

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4}x.$$

(c) Es gilt $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, also

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2 \cdot 0 - 5}{0 + 1} = -5,$$

d.h., die Funktion f besitzt die Asymptote $p(x) = -5$ für $x \to -\infty$.

Es gilt $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, also

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(2-5e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-5e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2 - 5 \cdot 0}{1+0} = 2,$$

d.h., die Funktion f besitzt die Asymptote $p(x) = 2$ für $x \to +\infty$. (**Alternativ** kann man auch die Regel von de L'Hospital anwenden, um den zweiten Grenzwert auszurechnen.) □

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{x^2+5}{x^3-3x+2}.$$

(a) Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$x^3 - 3x + 2 = (x-\lambda)(x-1)^2.$$

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x-\lambda} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\,dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 r(x)\,dx.$$

Lösung. (a) Es gilt

$$(x-\lambda)(x-1)^2 = (x-\lambda)(x^2-2x+1) = x^3 - (\lambda+2)x^2 + (2\lambda+1)x - \lambda.$$

Die Lösung ist also $\lambda = -2$.

Alternativ. Die Gleichung muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Insbesondere, falls wir $x = 0$ einsetzen, bekommen wir $2 = -\lambda \cdot (-1)^2$, also $\lambda = -2$.

(b) Wir setzen $\lambda = -2$ ein. Es muss gelten

$$x^2+5 = A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2) = (A+B)x^2+(B+C-2A)x+(A-2B+2C).$$

Koeffizientenvergleich liefert $A + B = 1$, $B + C - 2A = 0$, $A - 2B + 2C = 5$, also $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$.

(c) Aus der Partialbruchzerlegung folgt

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \ln(|x+2|) - \frac{2}{x-1} + C.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_2^3 r(x)\,dx &= \left[\ln(|x+2|) - \frac{2}{x-1}\right]_2^3 \\ &= (\ln(5) - 1) - (\ln(4) - 2) \\ &= \ln(5) - \ln(4) + 1.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x^2 - 1)\, dx.$$

Hinweis. Benutzen Sie partielle Integration.

Lösung. Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$ mit $u' \equiv 1$ liefert

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - 1)\, dx &= x \ln(x^2 - 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 - 1}\, dx.\end{aligned}$$

Der letzte Integrand ist eine rationale Funktion. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Anschließend führen wir eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(A + B)x + (A - B)}{x^2 - 1}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = 1/2$ und $B = -1/2$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - 1)\, dx &= x \ln(x^2 - 1) - 2 \int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}\right) dx \\ &= x \ln(x^2 - 1) - 2x - \ln(|x - 1|) + \ln(|x + 1|) + C.\end{aligned}$$ □

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2 & a & -1 \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass der Rang von A ungleich 3 ist.

(c) Bestimmen Sie a, sodass der Rang von A gleich 1 ist.

Lösung. (a) Wir entwickeln nach der dritten Zeile:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2 & a & -1 \\ a-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(-1+a^2) = (a-1)^2(a+1).$$

(b) Der Rang von A ist ungleich 3 genau dann, wenn $\det(A) = 0$, also wenn $a = 1$ oder $a = -1$.

Falls es bei (a) $\det(A) = a^3 - a^2 - a + 1$ ausgerechnet wurde, muss man dieses Polynom faktorisieren. Da 1 eine Nullstelle ist, kann man durch $a - 1$ dividieren und man bekommt

$$a^3 - a^2 - a + 1 = (a-1)(a^2-1) = (a-1)^2(a+1).$$

(c) Wenn der Rang von A gleich 1 ist, dann sind die erste und die zweite Spalte linear abhängig. Insbesondere muss $a - 1 = 0$ sein, also $a = 1$. Tatsächlich hat die Matrix A Rang 1, wenn $a = 1$, denn alle Spalten (bzw. Zeilen) von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind paarweise linear abhängig. □

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse B^{-1} folgender Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir fangen mit dem Tableau $(B|E)$ an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es sei z_i die i-te Zeile. Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + 3z_1$ und z_3 mit $z_3 + z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $-z_1$ und z_2 mit $z_2 - z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_3 mit $z_3 - 3z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + z_3$ und z_1 mit $z_1 - 2z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 9 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $z_1 + 2z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

Die Inverse ist also gegeben durch

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 9 (4 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Lösung. (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(7-\lambda) + 2 \cdot 4 \\ &= 7 - 7\lambda - \lambda + \lambda^2 + 8 \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 15 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 5). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von C sind also 3 und 5.

(b) Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 3$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Den Kern dieser Matrix müssen wir berechnen. Wir stellen das passende Tableau auf:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Lösen wir das homogene LGS, ergibt sich $x_1 = -2x_2$. Also gilt

$$V_3 = \mathrm{Ker}(C - 3E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 5$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Den Kern dieser Matrix müssen wir berechnen. Wir stellen das passende Tableau auf:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Lösen wir das homogene LGS, ergibt sich $x_1 = -x_2$. Also gilt

$$V_5 = \mathrm{Ker}(C - 5E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$ □