Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4, eigenhandgeschrieben.
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Sofern nicht anders angegeben, ist nur das Endergebnis einzutragen. Andernfalls sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Als **Bonus** ausgewiesene Aufgaben können bearbeitet werden, um Bonuspunkte zu sammeln. Diese sind möglicherweise etwas kniffliger und zählen nicht zur Maximalpunktzahl.
- Neben den Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen können Sie folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte ohne Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$\sin(x)\cos(x)+x$	$x-\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)^2$
$f'(x)$	$2\cos(x)^2$	$2\sin(x)^2$	$2\sin(x)\cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Lineare Differentialgleichungen — 4 Punkte)
Das charakteristische Polynom p der homogenen, linearen Differentialgleichung

$$y^{(4)} + y^{(3)} - y'' + y' - 2y = 0 \tag{L}$$

besitzt die Nullstellen 1 und -2.

1. Wie lauten die beiden verbleibenden Nullstellen λ_1, λ_2 von p?

$$\lambda_1 = \boxed{}, \; \lambda_2 = \boxed{}.$$

2. Geben Sie eine Basis für den Raum aller reellwertigen Lösungen von (L) an:

$$\boxed{}.$$

Aufgabe 2 (Fourier–Transformation *(Optional)* — 2 Bonuspunkte)

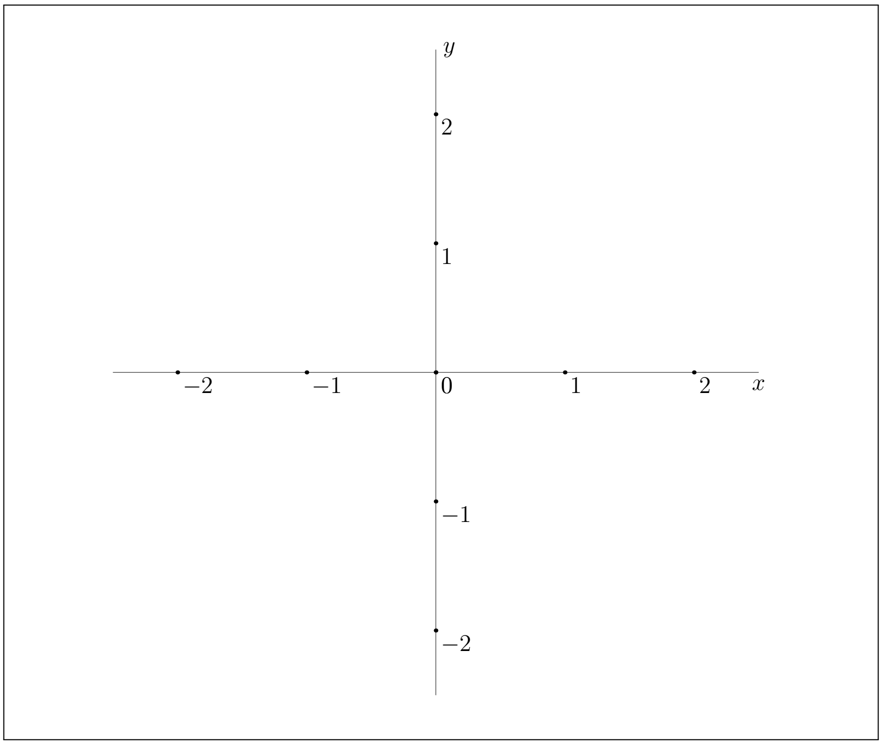
Bestimmen Sie die Fourier–Transformierte $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$ der Funktion $f(x) = \mathbf{I}_{[0,\infty[}(x) \cdot e^{-2x} \sinh(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Begründete Antwort:

$\hat{f}(\xi) =$

Aufgabe 3 (Integration in der Ebene *(Optional)* — 6 Bonuspunkte)
Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x$.

1. Skizzieren Sie f und g in einem gemeinsamen Koordinatensystem:



Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Graphen von f und g beschränkte Fläche.

2. Stellen Sie A als Normalbereich in y–Richtung dar:

$$A = \left\{ (x,y)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{ccccc} \boxed{} & \le & x & \le & \boxed{} \\ \boxed{} & \le & y & \le & \boxed{} \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie $\mathrm{vol}_2(A)$:

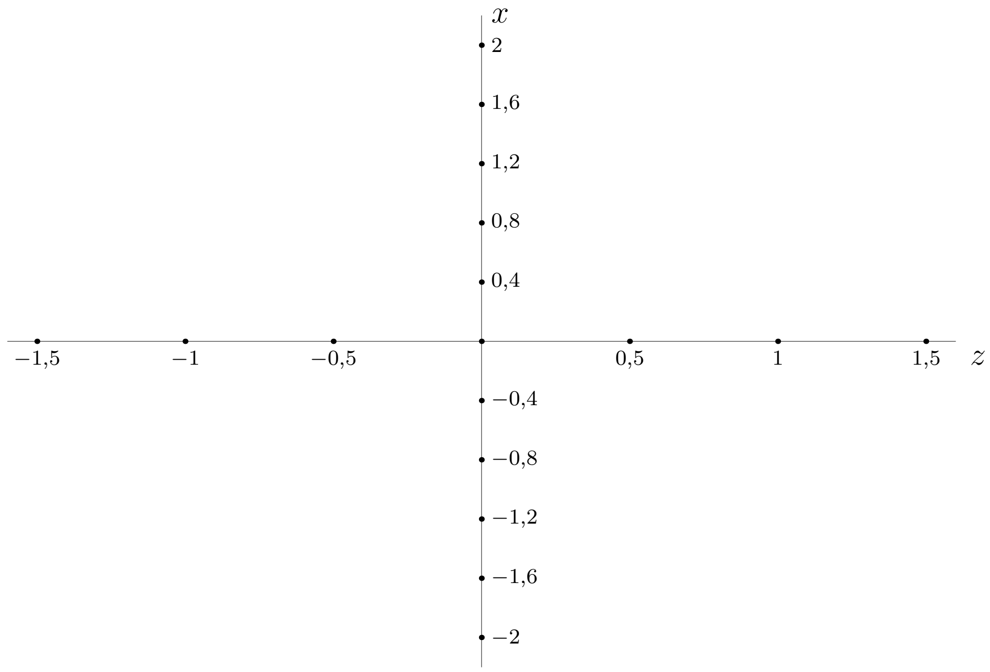
Begründete Antwort:

$\mathrm{vol}_2(A) =$

Aufgabe 4 (Integration im Raum — 14 Punkte)
Der Rotationskörper K sei definiert als

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 - z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq -z^2 - z + 2 \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x, z \in \mathbb{R} \right\}$.



2. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi \colon D \to K$, $\Phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi];\; \begin{array}{c} \square \leq r \leq \square \\ \square \leq z \leq \square \end{array} \right\}.$$

3. Berechnen Sie das Volumen von K.

Begründete Antwort:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

4. Durch $\Psi((\varphi, z)^\mathsf{T}) = ((1-z)\cos(\varphi), (1-z)\sin(\varphi), z)^\mathsf{T}$ wird eine der Randflächen M von K parametrisiert. Berechnen Sie die Jacobi–Matrix $J\Psi$ und das Kreuzprodukt $\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi}{\partial z}$:

$$J\Psi\left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ z\end{smallmatrix}\right) = \boxed{}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Psi}{\partial z}\left(\begin{smallmatrix}\varphi\\ z\end{smallmatrix}\right) = \boxed{}.$$

Im Nachfolgenden sei M durch den von K nach *außen* zeigenden Normalenvektor orientiert. Wir definieren außerdem das Vektorfeld W auf $\mathbb{R}^3$ durch $W((x, y, z)^\mathsf{T}) = (\sinh(z)y, x, z)^\mathsf{T}$.

5. Die Divergenz $\operatorname{div} W$ von W ist konstant. Berechnen Sie diese und $\int_M W \cdot \mathrm{d}S$:

$$\operatorname{div} W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boxed{}$$

Begründete Antwort:

$\int_M W \cdot \mathrm{d}S =$

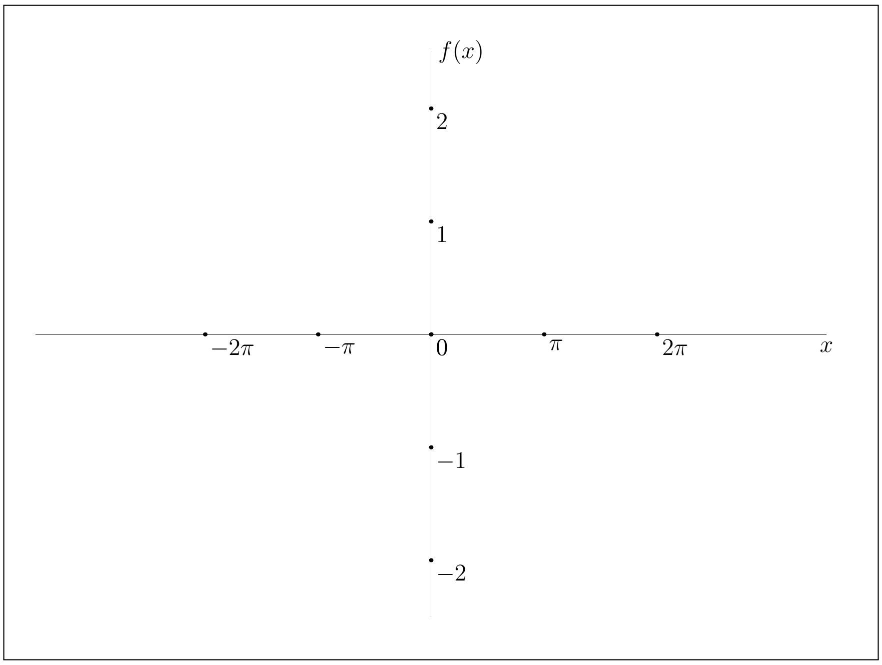
6. Bezeichne N die verbleibende Randfläche von K. Wie M sei auch N durch den von K nach außen zeigenden Normalenvektor orientiert. Schließen Sie auf den Wert $\int_N W \cdot \mathrm{d}S$:

$$\int_N W \cdot \mathrm{d}S = \boxed{}.$$

Aufgabe 5 (Fourier–Reihen — 11 Punkte + 1 Bonuspunkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion so dass $f(x) = \cos(x) - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Skizzieren Sie die Funktion f über das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.



2. Bezeichne S_f die Fourier–Reihe von f, also

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

für gewisse Koeffizienten $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$.

Gegen welche Funktion konvergiert die Reihe S_f punktweise?

$$S_f(x) = \boxed{}\,.$$

3. Berechnen Sie die reellen und komplexen Fourierkoeffizienten von f.

$a_0 = \boxed{}$, $a_1 = \boxed{}$,

$a_k = \boxed{}$ $(k > 1)$, $b_k = \boxed{}$, $(k > 0)$

$c_0 = \boxed{}$, $c_{-1} = \boxed{}$,

$c_1 = \boxed{}$, $c_k = \boxed{}$ $(k \neq 1)$.

4. (Bonus) Nutzen Sie die Fourierreihe S_f, um den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zu bestimmen.

Begründete Antwort:

Aufgabe 6 (Lineare Differentialgleichungssysteme — 6 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Zu lösen ist das lineare, homogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & -y_1 & + & 2y_2 & - & 2y_3 & + & y_4, \\ y_2' & = & -4y_1 & + & 6y_2 & - & 4y_3 & + & 4y_4, \\ y_3' & = & -2y_1 & + & 4y_2 & - & 2y_3 & + & 2y_4, \\ y_4' & = & 3y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3 & - & 3y_4. \end{array}\right. \tag{H}$$

1. Formulieren Sie (H) in der Gestalt $y' = Ay$ für eine Matrix A:

$$A = \boxed{}.$$

2. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet demnach die algebraische Vielfachheit m des Eigenwerts 0?

$$m = \boxed{}.$$

3. Geben Sie eine Basis $B : v_1, v_2, v_3, v_4$ des $\mathbb{C}^4$ an, die obige Jordan–Normalform realisiert.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \boxed{}, \; v_3 = \boxed{} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix W für (H):

$$W(x) = \boxed{} .$$

5. Lösen Sie (H) zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 15$, $y_3(0) = 4$ und $y_4(0) = -14$:

$$y(x) = \boxed{} .$$

Wir betrachten nun das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} y_1' & = & -y_1 & + & 2y_2 & - & 2y_3 & + & y_4 & - & (1+x)e^{-x}, \\ y_2' & = & -4y_1 & + & 6y_2 & - & 4y_3 & + & 4y_4, & & \\ y_3' & = & -2y_1 & + & 4y_2 & - & 2y_3 & + & 2y_4 & + & e^{-x}, \\ y_4' & = & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & - & 3y_4 & - & xe^{-x}. \end{array} \right. \tag{I}$$

6. *(Optional).* Bestimmen Sie die partikuläre Lösung von (I) mit $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$ und $y_4(0) = 0$:

$$y_{\mathrm{p}}(x) = \boxed{} .$$

(*Hinweis.* Verwenden Sie den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x)$ für eine noch zu bestimmende Funktion $c(x) = (0, *, *, 0)^{\mathsf{T}}$.)

Aufgabe 7 (Partielle Differentialgleichungen — 9 Punkte)

Wir untersuchen die partielle Differentialgleichung

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial y} = x, \qquad u(1, y) = y, \tag{P}$$

definiert für $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ fixiert und $(X(t), Y(t))$ die charakteristische Kurve der Differentialgleichung (P) mit $(X(0), Y(0)) = (1, y_0)$. Sei $U(t) = u(X(t), Y(t))$.

1. Formulieren Sie die charakteristischen Gleichungen zu (P).

   $X'(t) = \boxed{}$, $\qquad Y'(t) = \boxed{}$,

   $U'(t) = \boxed{}$.

   mit Anfangsbedingungen $X(0) = 1$, $Y(0) = y_0$, $U(0) = u(X(0), Y(0)) = y_0$.

2. Lösen Sie die charakteristischen Gleichungen.

   $X(t) = \boxed{}$, $\qquad Y(t) = \boxed{}$,

   $U(t) = \boxed{}$.

3. Schließen Sie auf die Lösung von (P):

Begründete Antwort:

$u(x, y) =$

4. Machen Sie eine Probe:

$$2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \boxed{},$$

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \boxed{}.$$

Aufgabe 8 (Wahrscheinlichkeitsrechnung — 8 Punkte)

Wir werfen einen fairen Würfel mit Seiten, die von 1 bis 6 nummeriert sind.

1. Wir betrachten die Ereignisse $A =$ "Das Ergebnis der Wurfes ist gerade", $B =$ "Das Ergebnis des Wurfes ist ungerade", $C =$ "Das Ergebnis des Wurfes ist ≥ 5".

   Sind A und B unabhängig? Sind A und C unabhängig?

   Begründete Antwort:

   A und B sind , denn:

   A und C sind , denn:

2. Wir würfeln fünfmal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau dreimal das Ergebnis 6 zu erhalten. (Geben Sie diese als vollständig gekürzten Bruch an, wobei der Nenner ein Produkt von Potenzen ganzer Zahlen sein darf.)

$$P(\text{“genau dreimal 6”}) = \boxed{}.$$

3. Es sei X_n die Summe der Zahlen, die man bei n Würfen erhält. Was ist die Varianz von X_1?

$$\sigma^2(X_1) = \boxed{}.$$

Geben Sie unter Verwendung der Ungleichung von Chebychev eine minimale Anzahl n von Würfen an, die notwendig sind, damit der Mittelwert X_n/n mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 3 und 4 liegt, also $3 < X_n/n < 4$.

$$n = \boxed{}.$$

4. Man nimmt nun einen 20-seitigen Würfel. Wir würfeln 60 mal und bezeichnen mit Y die Anzahl der 14, die wir erhalten. Mit welcher Poisson-Verteilung kann man die Verteilung von Y annähern?

$$P(\lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda = \boxed{}.$$

Berechnen Sie eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit, dass $Y \geq 5$ ist. Welche Fehlerschranke δ ergibt sich?

$$P(Y \geq 5) \approx \boxed{}, \qquad \delta = \boxed{}.$$

Verteilungsfunktion der Poisson-Verteilung

$$P(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3		0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4				0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5							0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6									1,0000	0,9999
7										1,0000

	1.1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,6990	0,6626	0,6268	0,5918	0,5578	0,5249	0,4932	0,4628	0,4337	0,4060
2	0,9004	0,8795	0,8571	0,8335	0,8088	0,7834	0,7572	0,7306	0,7037	0,6767
3	0,9743	0,9662	0,9569	0,9463	0,9344	0,9212	0,9068	0,8913	0,8747	0,8571
4	0,9946	0,9923	0,9893	0,9857	0,9814	0,9763	0,9704	0,9636	0,9559	0,9473
5	0,9990	0,9985	0,9978	0,9968	0,9955	0,9940	0,9920	0,9896	0,9868	0,9834
6	0,9999	0,9997	0,9996	0,9994	0,9991	0,9987	0,9981	0,9974	0,9966	0,9955
7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9994	0,9992	0,9989
8			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
9							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,3796	0,3546	0,3309	0,3084	0,2873	0,2674	0,2487	0,2311	0,2146	0,1991
2	0,6496	0,6227	0,5960	0,5697	0,5438	0,5184	0,4936	0,4695	0,4460	0,4232
3	0,8386	0,8194	0,7993	0,7787	0,7576	0,7360	0,7141	0,6919	0,6696	0,6472
4	0,9379	0,9275	0,9162	0,9041	0,8912	0,8774	0,8629	0,8477	0,8318	0,8153
5	0,9796	0,9751	0,9700	0,9643	0,9580	0,9510	0,9433	0,9349	0,9258	0,9161
6	0,9941	0,9925	0,9906	0,9884	0,9858	0,9828	0,9794	0,9756	0,9713	0,9665
7	0,9985	0,9980	0,9974	0,9967	0,9958	0,9947	0,9934	0,9919	0,9901	0,9881
8	0,9997	0,9995	0,9994	0,9991	0,9989	0,9985	0,9981	0,9976	0,9969	0,9962
9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9991	0,9989
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
11					1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
12									1,0000	1,0000

Ablesebeispiel: Für $\lambda = 1{,}6$ gilt $P(X \leq 2) \approx 0{,}7834$.