Universität Stuttgart

Modulklausur Mathematik für inf swt msv im Sommersemester 2023 — A. Kollross

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion) (7 Punkte)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (7 Punkte)

Gegeben seien die reelle 2×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 3 (Eigenwerte) (7 Punkte)

Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

b) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Darstellende Matrix) (7 Punkte)

Sei eine lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.

b) Sei nun die Basis B gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (Folgen) (6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen konvergieren.

$$\text{a)} \quad a_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n, \qquad \text{b)} \quad b_n = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}, \qquad \text{c)} \quad c_n = (1+i)^n.$$

Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6 (Reihen) (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2(n+1)n}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7 (Konvergenzradius) (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n} x^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+2} x^n.$$

Aufgabe 8 (Extrema) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 3\,x + xy.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt und ob ein isoliertes lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 9 (Verschiedenes) (6 Punkte)
Berechnen Sie:

$$\text{a)} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}, \qquad \text{c)} \int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!