Mathematik für inf swt msv im Sommersemester 2023
Lösungsvorschläge zur Modulklausur

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion) (7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 1 *Induktionsanfang:* Die Behauptung gilt für $n = 1$, denn:

$$1^3 = 1 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1).$$

Induktionsschritt: Es gilt einerseits nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
&1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 + (2n+1)^3 = \\
&\quad = n^2(2n^2-1) + (2n+1)^3 = 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = \\
&\quad = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.
\end{aligned}$$

Andererseits ergibt die rechte Seite der Behauptung, wenn man $n+1$ anstelle von n einsetzt:

$$\begin{aligned}
&(n+1)^2(2(n+1)^2-1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) = \\
&\quad = 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 = \\
&\quad = 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1.
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (7 Punkte)
Gegeben seien die reelle 2×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Lösung zu Aufgabe 2 Das Anwenden des Gaußalgorithmus auf die erweiterte Matrix liefert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ -4 & -9 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

Es gibt also 2 Pivotvariablen und einen freien Parameter. Setze $x_3 := t$.
Rückwärtseinsetzen liefert:

$$x_2 = 12 - 2t \quad \text{und} \quad x_1 = -2(12-2t) + t - 5 = -29 + 5t.$$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} -29+5t \\ 12-2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -29 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Eigenwerte) (7 Punkte)

Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.
b) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -3 & t-2 & -3 \\ -2 & -3 & t-2 \end{pmatrix} =$$
$$= (t-1)(t-2)(t-2) - 6 - 9 - 2(t-2) - 9(t-1) - 3(t-2) =$$
$$= t^3 - 5t^2 - 6t$$

wobei wir die Regel von Sarrus angewendet haben. Offensichtlich ist 0 eine Nullstelle, die anderen sind $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{25+24}) = 6$ und $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{25+24}) = -1$. Die Eigenwerte sind somit 0, 6 und -1.

b) Die Matrix ist diagonalisierbar, da sie drei verschiedene Eigenwerte hat.

Aufgabe 4 (Darstellende Matrix) (7 Punkte)

Sei eine lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Geben Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ an.
b) Sei nun die Basis B gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis B.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Man liest die darstellende Matrix direkt ab:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir bilden die Transformationsmatrix aus den Vektoren in B:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen ihre Inverse:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Die gesuchte Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 (Folgen) (6 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen konvergieren.

$$\text{a)} \quad a_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n, \qquad \text{b)} \quad b_n = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}, \qquad \text{c)} \quad c_n = (1+i)^n.$$

Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Folge konvergiert gegen Null, denn es gilt $|(\frac{i}{2})^n| = \frac{1}{2^n} \to 0$.

b) Es gilt

$$\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+3n}{n^2+3n+2} = \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \longrightarrow 1.$$

c) Die Folge c_n divergiert, denn sie ist wegen $|c_n| \longrightarrow \infty$ nicht beschränkt.

Aufgabe 6 (Reihen) (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2(n+1)n}.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Wir benutzen das Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-10)^{n+1}4^{2n+1}(n+1)}{4^{2n+3}(n+2)(-10)^n}\right| = \frac{10(n+1)}{16(n+2)} \longrightarrow \frac{5}{8}.$$

Das zeigt, dass die Reihe konvergiert.
Alternative Lösung: Man findet, wenn man die Reihenentwicklung des natürlichen Logarithmus benutzt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)} = -\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)}(\frac{5}{8})^{n+1} = \frac{2}{5}\ln(1+\frac{5}{8}) = \frac{2}{5}\ln(\frac{13}{8})$.

b) Die Reihe divergiert, da die Summanden keine Nullfolge bilden:

$$\frac{n^2}{2(n+1)n} = \frac{1}{2+\frac{2}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 7 (Konvergenzradius) (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n} x^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n+2} x^n.$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) Wir berechnen:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{7^n}{n} \cdot \frac{n+1}{7^{n+1}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{7}.$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{7}$.
Alternative Lösung: Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-7x)^n = -\ln(1-7x)$$

ist der Konvergenzradius $\frac{1}{7}$ mal der Konvergenzradius der Reihe $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, die den Konvergenzradius 1 hat.

b) Wir berechnen:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n!}{n+2} \cdot \frac{n+3}{(n+1)!} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 0.$$

Der Konvergenzradius ist Null.

Aufgabe 8 (Extrema) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 3\,x + xy.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt und ob ein isoliertes lokales Extremum vorliegt.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Man berechnet:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2\,x + 3 + y, 2\,y + x)$$

und

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum in einem Punkt ist das Verschwinden des Gradienten in diesem Punkt. Wir setzen also $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ und erhalten die beiden Gleichungen $2\,x + 3 + y = 0$ und $2\,y + x = 0$. Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $x = -2\,y$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $y = 1$. Daraus folgt, dass $(-2, 1)$ der einzige Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist, an dem der Gradient von f verschwindet. Da die Hessematrix in jedem Punkt positiv definit ist, folgt insbesondere, dass f bei $(-2, 1)$ ein isoliertes lokales Minimum annimmt. Wir haben gezeigt, dass dies das einzige lokale Extremum der Funktion ist.

Aufgabe 9 (Verschiedenes) (6 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$, c) $\int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Wir berechnen:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 3i + 3i^2 + i^3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + 3i - 3 - i) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Alternative Lösung: Es handelt sich bei $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ um die komplexe Zahl vom Betrag 1, die den Winkel $\frac{\pi}{4}$ mit der x-Achse einschließt. Die dritte Potenz davon ist die komplexe Zahl $\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

b) Mit der Summenformel für die geometrische Reihe folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 = 3 - 1 = 2.$$

c) Wir berechnen:

$$\int_0^1 \int_{-y}^{+y} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-y}^{+y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{2}{3} y^3 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{6}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$