Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 16.10.2023 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **23.10.2023** bis **25.10.2023** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f\binom{x}{y} := x^3 + 3xy^2$. Bestimmen Sie jeweils den minimalen und den maximalen Wert, der von f auf der Ellipse $D := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 5\}$ angenommen wird.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $U : u_1, u_2, u_3$ so, dass

$$\mathrm{L}(u_1) = \mathrm{L}(b_1), \quad \mathrm{L}(u_1, u_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{L}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$$

ist und dass $U : u_1, u_2, u_3$ ein Rechtssystem ist.

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_n := a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{für } n \geqq 3.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $a_{3k+1} = (-1)^k a_1$ für alle $k \geqq 0$ gilt.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*) Gegeben sei der reelle Vektorraum

$$U = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \exists a_1, a_2 \in \mathbb{R} :\ f(x) = a_1 \mathrm{e}^x + a_2 x \mathrm{e}^x \right\}$$

mit zugehörigen Basen $B\colon b_1, b_2$ und $C\colon c_1, c_2$ mit

$$\begin{aligned} b_1(x) &= 3\mathrm{e}^x, & b_2(x) &= (x-2)\mathrm{e}^x \\ c_1(x) &= \mathrm{e}^x, & c_2(x) &= x\mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$

Gegeben sei ferner die lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U\colon f \mapsto \varphi(f)$, wobei die Funktion $\varphi(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$(\varphi(f))(x) = f(2x-3) \cdot \mathrm{e}^{2-x}\,.$$

(a) Bestimmen Sie $(\varphi(b_1))(x)$ und $(\varphi(b_2))(x)$.

(b) Bestimmen Sie Skalare $\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$ für $j, k \in \{1, 2\}$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= \alpha_{1,1} \cdot c_1 + \alpha_{2,1} \cdot c_2 \\ \varphi(b_2) &= \alpha_{1,2} \cdot c_1 + \alpha_{2,2} \cdot c_2\,. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie die Matrix ${}_C\varphi_B$.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral.

$$\int \frac{3x^3 + 5x^2 + 3x}{x^2 + 1} \, \mathrm{d}x$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{\ln(x) + 1}{x \ln(x)} \, \mathrm{d}x.$$

(c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $(A - 4\mathrm{E}_4)\, x = 0$.

(b) Geben Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A als Produkt von Linearfaktoren an.

(c) Ist A invertierbar?

(d) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

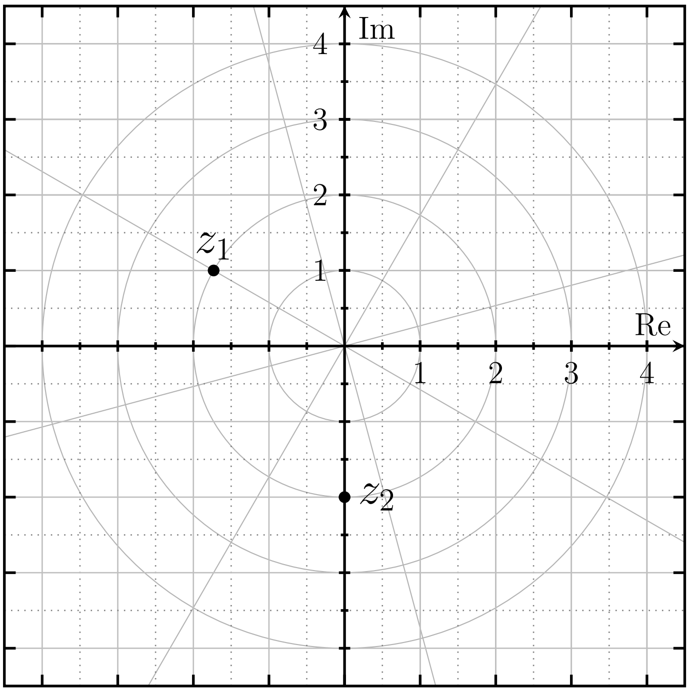
(a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das Vektorfeld $v_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(xy^2)} y^3 + \alpha \\ \mathrm{e}^{(xy^2)} + 2xy^2 \mathrm{e}^{(xy^2)} + 3\alpha \end{pmatrix}$ ein Potential besitzt.

(b) Bestimmen Sie ein Potential für das Vektorfeld v_1 .

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe 8 (*4 Punkte*)

(a) In der Gaußschen Zahlenebene sind komplexe Zahlen z_1 und z_2 gegeben: siehe Skizze. Zeichnen Sie die Zahlen $u := z_1 + z_2$ und $v := z_1 \cdot z_2$ ebenfalls ein.



(b) Geben Sie die Lösungen w_1, w_2 der Gleichung

$$\mathrm{i}\, w^2 + (2+4\mathrm{i})w + 4 + 4\mathrm{i} = 0$$

in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$w_1 =$ $\qquad$ $w_2 =$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Reihenwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{4n}\right)^n =$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{\sin(\pi x)} =$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{2x+\sin(2x)} =$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$

(e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k - 3^k}{4^k} =$

(f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{(k-2)!} =$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Sei $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Der Punkt P habe im kartesischen Koordinatensystem $\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}\right)$ den Koordinatenvektor ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P: $\quad {}_{\mathbb{E}}P =$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^2$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$:

${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) =$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an einer Ebene E, welche den Punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf den Punkt $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^3$ der Strecke von P nach $\varphi(P)$: $M =$

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, der senkrecht zur Spiegelebene E steht: $v =$

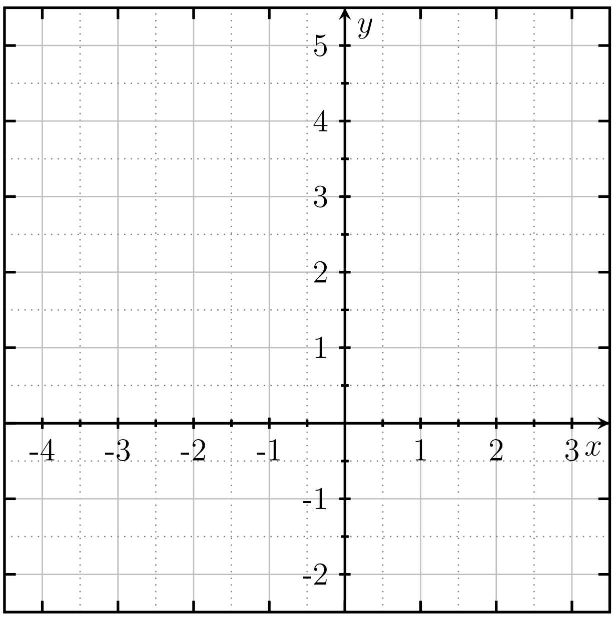
(c) Bestimmen Sie die Spiegelebene: $E =$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} x^2 + x - 1 & \text{falls } x \leqq -1 \\ x^3 & \text{falls } -1 < x < 1 \\ x^2 + x - 1 & \text{falls } x \geqq 1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \to -1-0} f'(x) = \quad , \quad \lim_{x \to -1+0} f'(x) = \quad , \quad \lim_{x \to 1-0} f'(x) = \quad , \quad \lim_{x \to 1+0} f'(x) = \quad .$$

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqq x \leqq 2$:



(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f nicht stetig differenzierbar? $x \in \{ \quad \}$
