

Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP)

09.08.2023

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht bewertet. Bitte unterlassen Sie außerdem die Verwendung von Tipp-Ex oder ähnlichem.
- Bitte geben Sie zu jeder Teilaufgabe einen kurzen Rechenweg oder eine Begründung an. Kürzen bzw. vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.
- Bitten fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.
- Es sind insgesamt 40 Punkte in den **Aufgaben 1-9** erreichbar.

Viel Erfolg!

Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP)

09.08.2023

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n = \frac{3 + 4n^6 + 5n^3}{1 + n^3 + n^6}$

(c) $(c_n)_{n \geq 1}$ mit $c_n = \frac{(2n^2 + 1) \cdot n!}{(n + 2)!}$

(b) $(b_n)_{n \geq 1}$ mit $b_n = 3 \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)$

(d) $(d_n)_{n \geq 1}$ mit $d_n = \frac{n}{n + e^{-n}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n + 1)!}$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Betrachten Sie folgende vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cos(ax) - 2 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{e^{x^3} - 1}{x^3} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a , sodass f stetig ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \arctan(x^2) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f .

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f von Grad 2 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

(c) Berechnen Sie die Asymptoten von f für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Zur Erinnerung über die Funktion Arcustangens:

$$\begin{aligned} \arctan(0) &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{d}{dx} \arctan(x) &= \frac{1}{x^2 + 1}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte). Betrachten Sie die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

(a) Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - \lambda)(x - 1)^2.$$

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x - \lambda} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x) dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 r(x) dx.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x^2 - x) dx.$$

Hinweis. Benutzen Sie partielle Integration.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Betrachten Sie folgende Matrix A , die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 - a \\ 1 & a - 3 & 1 \\ a - 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A .

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass der Rang von A ungleich 3 ist.

(c) Bestimmen Sie a , sodass der Rang von A gleich 1 ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Finden Sie die Inverse B^{-1} folgender Matrix B .

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C .

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C .