Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP)
mit Lösungen und Bepunktung

09.08.2023

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht bewertet. Bitte unterlassen Sie außerdem die Verwendung von Tipp-Ex oder ähnlichem.
- Bitte geben Sie zu jeder Teilaufgabe einen kurzen Rechenweg oder eine Begründung an. Kürzen bzw. vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.
- Bitten fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.
- Es sind insgesamt 40 Punkte in den **Aufgaben 1-9** erreichbar.

Viel Erfolg!

Modulprüfung (Modul 41990 mit 6 LP) mit Lösungen und Bepunktung

09.08.2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{3+4n^6+5n^3}{1+n^3+n^6}$

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = 3\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$

(c) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \dfrac{(2n^2+1)\cdot n!}{(n+2)!}$

(d) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = \dfrac{n}{n+\mathrm{e}^{-n}} + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert, sonst 0. Der Rechenweg wird nicht berücksichtigt.)

(a) Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(\frac{3}{n^6}+4+\frac{5}{n^3}\right)}{n^6\left(\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^3}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^6}+\frac{5}{n^3}+4}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^3}+1} = 4.$$

(b) Es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1.$$
Da der Logarithmus eine stetige Funktion ist, gilt
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3\ln(1) = 0.$$

(c) Für jedes $n \geq 1$ gilt
$$c_n = \frac{(2n^2+1)\cdot n!}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!} = \frac{2n^2+1}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2}.$$
Dementsprechend gilt
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

(d) Es gilt $d_n = u_n + v_n$ mit
$$u_n = \frac{n}{n+\mathrm{e}^{-n}} \quad \text{und} \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{e^{-n}}{n}} = 1,$$

denn der Cosinus eine beschränkte Funktion ist. Für v_n benutzen wir den bekannten Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{a}{m}\right)^m = e^a.$$

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = 1 + e^2.$$ □

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}$

Lösung. (Bepunktung: 2 Punkte für jede korrekt ausgerechnete Reihe. 1 Punkt, falls mindestens ein grundsätzlicher Schritt des Rechenwegs korrekt ist. 0 Punkte, wenn keine richtige Idee im Rechenweg zu erkennen ist.)

(a) Wegen der geometrischen Reihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^3}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 9. \qquad \square$$

(b) Wegen der Exponentialreihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^m}{m!} = 2\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{m!} - \frac{3^1}{1!} - \frac{3^0}{0!} \right) = 2(\mathrm{e}^3 - 4)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(ax) - 2 & \text{für } x \leq 0, \\ \dfrac{e^{x^3} - 1}{x^3} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a\cos(ax) - 2 = a\cos(a \cdot 0) - 2 = a - 2.$$

(Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für die Idee, die Regel von de L'Hospital zu benutzen.) Aus der Regel von de L'Hospital folgt

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^3} - 1}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 e^{x^3}}{3x^2} = \lim_{x \to 0^+} e^{x^3} = 1.$$

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die zwei Grenzwerte übereinstimmen, also wenn $a = 3$. $\square$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \arctan(x^2) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f von Grad 2 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

(c) Berechnen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Zur Erinnerung über die Funktion Arcustangens:

$$\arctan(0) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt für jede richtige Ableitung.)* Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x^2)^2+1} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^4+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\cdot(x^4+1) - 2x\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2x^4+2-8x^4}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2-6x^4}{(x^4+1)^2} \end{aligned}$$

(Bepunktung: Jeweils 1 Punkt, sobald der erste Schritt richtig ist, auch wenn es danach falsch gekürzt wird.)

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt falls mindestens eine Koffiziente richtig ist. 2 Punkte nur dann, wenn alles richtig ist.)* Das Taylorpolynom von Grad 2 an der Entwicklungsstelle 0 ist gegeben durch

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + 0\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{2-6\cdot 0}{(0^4+1)^2}\cdot x^2 = x^2.$$

(c) *(Bepunktung: 1 Punkt für jede richtige Asymptote.)* Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

d.h., die Funktion f besitzt die Asymptote $p(x) = \frac{\pi}{2}$ sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$. □

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

(a) Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - \lambda)(x - 1)^2.$$

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x - \lambda} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 r(x)\, dx.$$

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$(x - \lambda)(x-1)^2 = (x - \lambda)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - (\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 1)x - \lambda.$$

Die Lösung ist also $\lambda = 1$.

Alternativ. Die Gleichung muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Insbesondere, falls wir $x = 0$ einsetzen, bekommen wir $-1 = -\lambda \cdot (-1)^2$, also $\lambda = 1$.

(b) *(Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für die Idee, Koeffizienten zu vergleichen.)* Wir setzen $\lambda = 1$ ein. Es muss gelten

$$2x^2 - 4x = A(x-1)^2 + B(x-1) + C = Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$, $B - 2A = -4$, $+A - B + C = 0$, also

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = -2.$$

(c) *(Bepunktung: 2 Punkte, 1 Punkt je Term.)* Aus der Partialbruchzerlegung folgt

$$\int r(x)\, dx = \int \frac{2}{x-1}\, dx - \int \frac{2}{(x-1)^3}\, dx = 2\ln(|x-1|) + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

(Bepunktung: Die Antwort $\ln(x-1)$ *statt* $\ln(|x-1|)$ *wird als korrekt betrachtet. Kein Punktabzug, falls "+C" fehlt.)*

(d) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$\begin{aligned}\int_2^3 r(x)\,dx &= \left[2\ln(|x-1|) + \frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3 \\ &= (2\ln(2) + \frac{1}{4}) - (2\ln(1) + 1) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x^2 - x)\,dx.$$

Hinweis. Benutzen Sie partielle Integration.

Lösung. Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$ mit $u' \equiv 1$ liefert

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - x)\,dx &= x\ln(x^2 - x) - \int x \cdot \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx \\ &= x\ln(x^2 - x) - \int \frac{2x-1}{x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Der letzte Integrand ist eine rationale Funktion. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - x)\,dx &= x\ln(x^2 - x) - \int \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= x\ln(x^2 - x) - 2x - \ln(|x-1|) + C.\end{aligned}$$

□

(Bepunktung:

- *2 Punkte, falls partielle Integration korrekt angewendet wird.*
- *Bis zu 2 Punkten für andere sinnvollen Schritte.*
- *Kein Punktabzug, falls "+C" fehlt.*
- *Kein Punktabzug, falls der Betrag $|x-1|$ fehlen.*
- *4 Punkte nur wenn alles richtig ist.*

)

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-a \\ 1 & a-3 & 1 \\ a-1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass der Rang von A ungleich 3 ist.

(c) Bestimmen Sie a, sodass der Rang von A gleich 1 ist.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 2 Punkte.)* Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4-a \\ 1 & a-3 & 1 \\ a-1 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= (4-a)\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ a-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (4-a)(3-(a-1)(a-3)) \\ &= (4-a)(-a^2+4a) \\ &= a(a-4)^2.\end{aligned}$$

(Bepunktung: Korrekte Antwort ist auch $a^3 - 8a^2 + 16a$.)

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Der Rang von A ist ungleich 3 genau dann, wenn $\det(A) = 0$, also wenn $a = 0$ oder $a = 4$.

Falls es bei (a) $\det(A) = a^3 - 8a^2 + 16a$ ausgerechnet wurde, muss man dieses Polynom faktorisieren:

$$a^3 - 8a^2 + 16a = a(a^2 - 8a + 16) = a(a-4)^2.$$

(c) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wenn der Rang von A gleich 1 ist, dann sind die erste und die dritte Spalte linear abhängig. Insbesondere muss $4 - a = 0$ sein, also $a = 4$. Tatsächlich hat die Matrix A Rang 1, wenn $a = 4$, denn alle Spalten (bzw. Zeilen) von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

sind paarweise linear abhängig. □

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse B^{-1} folgender Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir fangen mit dem Tableau $(B|E)$ an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es sei z_i die i-te Zeile. Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $-z_1$ und z_2 mit z_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_3 mit $z_3 + 2z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $z_1 + 2z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Die Inverse ist also gegeben durch

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

(Bepunktung:

- *Mindestens 2 Punkte, falls eine Spalte oder eine Zeile von $\boldsymbol{B}^{-1}$ korrekt ausgerechnet wurde.*
- *Bis zu 2 Punkte für sinnvolle Schritte.*
- *1 Punkt, falls $\det(\boldsymbol{B}) = 1$ korrekt ausgerechnet wurde.*
- *4 Punkte nur wenn alles richtig ist.*

)

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(8-\lambda) - 6 \cdot (-4) \\ &= -16 + 2\lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 24 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Die Eigenwerte von C sind also 2 und 4.

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 2$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 2E = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $x_1 = -x_2$. Also gilt

$$V_2 = \mathrm{Ker}(C - 2E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 4$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $3x_1 = -2x_2$. Also gilt

$$V_4 = \mathrm{Ker}(C - 4E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

□