Modulprüfung (Modul 100050 mit 9 LP)

09.08.2023

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht bewertet. Bitte unterlassen Sie außerdem die Verwendung von Tipp-Ex oder ähnlichem.
- Bitte geben Sie zu jeder Teilaufgabe einen kurzen Rechenweg oder eine Begründung an. Kürzen bzw. vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.
- Bitten fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.
- Es sind insgesamt 60 Punkte in den **Aufgaben 1-13** erreichbar.

Viel Erfolg!

Modulprüfung (Modul 100050 mit 9 LP)

09.08.2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{3+4n^6+5n^3}{1+n^3+n^6}$

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = 3\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$

(c) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \dfrac{(2n^2+1)\cdot n!}{(n+2)!}$

(d) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = \dfrac{n}{n+\mathrm{e}^{-n}} + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(ax) - 2 & \text{für } x \leq 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x^3}-1}{x^3} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \arctan(x^2) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f von Grad 2 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

(c) Berechnen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Zur Erinnerung über die Funktion Arcustangens:

$$\arctan(0) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

(a) Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - \lambda)(x - 1)^2.$$

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x - \lambda} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 r(x)\, dx.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x^2 - x)\, dx.$$

Hinweis. Benutzen Sie partielle Integration.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 - a \\ 1 & a - 3 & 1 \\ a - 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass der Rang von A ungleich 3 ist.

(c) Bestimmen Sie a, sodass der Rang von A gleich 1 ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse B^{-1} folgender Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Aufgabe 10 (5 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

(a) Finden Sie alle lokalen Maximalstellen von f im offenen Intervall $(0, 3)$.

(b) Finden Sie alle globalen Minimalstellen von f im abgeschlossenen Intervall $[0, 3]$.

(c) Finden Sie alle Wendepunkte von f.

Aufgabe 11 (7 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y)(x^2 + y - 2).$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f.

(b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hesse-Matrix $Hf(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Minimalstellen, lokalen Maximalstellen und Sattelpunkte von f.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x + y^2.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Lösung folgender Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \quad \text{mit } y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 10$$