Modulprüfung (Modul 100050 mit 9 LP) mit Lösungen und Bepunktung

09.08.2023

Beachten Sie die folgenden Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht bewertet. Bitte unterlassen Sie außerdem die Verwendung von Tipp-Ex oder ähnlichem.
- Bitte geben Sie zu jeder Teilaufgabe einen kurzen Rechenweg oder eine Begründung an. Kürzen bzw. vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.
- Bitten fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.
- Es sind insgesamt 60 Punkte in den **Aufgaben 1-13** erreichbar.

Viel Erfolg!

Modulprüfung (Modul 100050 mit 9 LP) mit Lösungen und Bepunktung

09.08.2023

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Folgen.

(a) $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{3+4n^6+5n^3}{1+n^3+n^6}$

(b) $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = 3\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$

(c) $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \dfrac{(2n^2+1)\cdot n!}{(n+2)!}$

(d) $(d_n)_{n\geq 1}$ mit $d_n = \dfrac{n}{n+\mathrm{e}^{-n}} + \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert, sonst 0. Der Rechenweg wird nicht berücksichtigt.)

(a) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6\left(\frac{3}{n^6}+4+\frac{5}{n^3}\right)}{n^6\left(\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^3}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^6}+\frac{5}{n^3}+4}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^3}+1} = 4.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1.$$

Da der Logarithmus eine stetige Funktion ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 3\ln(1) = 0.$$

(c) Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$c_n = \frac{(2n^2+1)\cdot n!}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!} = \frac{2n^2+1}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2}.$$

Dementsprechend gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

(d) Es gilt $d_n = u_n + v_n$ mit

$$u_n = \frac{n}{n+\mathrm{e}^{-n}} \quad \text{und} \quad v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{e^{-n}}{n}} = 1,$$

denn der Cosinus eine beschränkte Funktion ist. Für v_n benutzen wir den bekannten Grenzwert

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{a}{m}\right)^m = e^a.$$

Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = 1 + e^2. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!}$

Lösung. (Bepunktung: 2 Punkte für jede korrekt ausgerechnete Reihe. 1 Punkt, falls mindestens ein grundsätzlicher Schritt des Rechenwegs korrekt ist. 0 Punkte, wenn keine richtige Idee im Rechenweg zu erkennen ist.)

(a) Wegen der geometrischen Reihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^3}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 9. \qquad \square$$

(b) Wegen der Exponentialreihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{3^m}{m!} = 2\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{m!} - \frac{3^1}{1!} - \frac{3^0}{0!}\right) = 2(\mathrm{e}^3 - 4)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(ax) - 2 & \text{für } x \leq 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^{x^3} - 1}{x^3} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a\cos(ax) - 2 = a\cos(a \cdot 0) - 2 = a - 2.$$

(Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für die Idee, die Regel von de L'Hospital zu benutzen.) Aus der Regel von de L'Hospital folgt

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{x^3} - 1}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2\mathrm{e}^{x^3}}{3x^2} = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{e}^{x^3} = 1.$$

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die zwei Grenzwerte übereinstimmen, also wenn $a = 3$. □

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \arctan(x^2) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

(b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von f von Grad 2 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

(c) Berechnen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

Zur Erinnerung über die Funktion Arcustangens:

$$\arctan(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt für jede richtige Ableitung.)* Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x^2)^2 + 1} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{x^4+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cdot (x^4+1) - 2x \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 2 - 8x^4}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{2 - 6x^4}{(x^4+1)^2} \end{aligned}$$

(Bepunktung: Jeweils 1 Punkt, sobald der erste Schritt richtig ist, auch wenn es danach falsch gekürzt wird.)

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt falls mindestens eine Koffiziente richtig ist. 2 Punkte nur dann, wenn alles richtig ist.)* Das Taylorpolynom von Grad 2 an der Entwicklungsstelle 0 ist gegeben durch

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - 6 \cdot 0}{(0^4+1)^2} \cdot x^2 = x^2.$$

(c) *(Bepunktung: 1 Punkt für jede richtige Asymptote.)* Es gilt

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

d.h., die Funktion f besitzt die Asymptote $p(x) = \frac{\pi}{2}$ sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$. □

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}.$$

(a) Finden Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - \lambda)(x - 1)^2.$$

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x - \lambda} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 r(x)\, dx.$$

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$(x - \lambda)(x - 1)^2 = (x - \lambda)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - (\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 1)x - \lambda.$$

Die Lösung ist also $\lambda = 1$.

Alternativ. Die Gleichung muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Insbesondere, falls wir $x = 0$ einsetzen, bekommen wir $-1 = -\lambda \cdot (-1)^2$, also $\lambda = 1$.

(b) *(Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für die Idee, Koeffizienten zu vergleichen.)* Wir setzen $\lambda = 1$ ein. Es muss gelten

$$2x^2 - 4x = A(x - 1)^2 + B(x - 1) + C = Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$, $B - 2A = -4$, $+A - B + C = 0$, also

$$A = 2, \quad B = 0, \quad C = -2.$$

(c) *(Bepunktung: 2 Punkte, 1 Punkt je Term.)* Aus der Partialbruchzerlegung folgt

$$\int r(x)\, dx = \int \frac{2}{x-1}\, dx - \int \frac{2}{(x-1)^3}\, dx = 2\ln(|x - 1|) + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

(Bepunktung: Die Antwort $\ln(x - 1)$ *statt* $\ln(|x - 1|)$ *wird als korrekt betrachtet. Kein Punktabzug, falls "+C" fehlt.)*

(d) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Es gilt

$$\begin{aligned}\int_2^3 r(x)\,dx &= \left[2\ln(|x-1|) + \frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3 \\ &= (2\ln(2) + \frac{1}{4}) - (2\ln(1) + 1) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \ln(x^2 - x)\,dx.$$

Hinweis. Benutzen Sie partielle Integration.

Lösung. Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$ mit $u' \equiv 1$ liefert

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - x)\,dx &= x\ln(x^2 - x) - \int x \cdot \frac{2x-1}{x^2 - x}\,dx \\ &= x\ln(x^2 - x) - \int \frac{2x-1}{x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Der letzte Integrand ist eine rationale Funktion. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\int \ln(x^2 - x)\,dx &= x\ln(x^2 - x) - \int \left(2 + \frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= x\ln(x^2 - x) - 2x - \ln(|x-1|) + C.\end{aligned}$$ □

(Bepunktung:

- *2 Punkte, falls partielle Integration korrekt angewendet wird.*
- *Bis zu 2 Punkten für andere sinnvollen Schritte.*
- *Kein Punktabzug, falls "+C" fehlt.*
- *Kein Punktabzug, falls der Betrag $|x-1|$ fehlen.*
- *4 Punkte nur wenn alles richtig ist.*

)

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4-a \\ 1 & a-3 & 1 \\ a-1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass der Rang von A ungleich 3 ist.

(c) Bestimmen Sie a, sodass der Rang von A gleich 1 ist.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 2 Punkte.)* Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4-a \\ 1 & a-3 & 1 \\ a-1 & 3 & 3 \end{vmatrix} &= (4-a) \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ a-1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (4-a)(3-(a-1)(a-3)) \\ &= (4-a)(-a^2+4a) \\ &= a(a-4)^2. \end{aligned}$$

(Bepunktung: Korrekte Antwort ist auch $a^3 - 8a^2 + 16a$.)

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Der Rang von A ist ungleich 3 genau dann, wenn $\det(A) = 0$, also wenn $a = 0$ oder $a = 4$.

Falls es bei (a) $\det(A) = a^3 - 8a^2 + 16a$ ausgerechnet wurde, muss man dieses Polynom faktorisieren:

$$a^3 - 8a^2 + 16a = a(a^2 - 8a + 16) = a(a-4)^2.$$

(c) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wenn der Rang von A gleich 1 ist, dann sind die erste und die dritte Spalte linear abhängig. Insbesondere muss $4 - a = 0$ sein, also $a = 4$. Tatsächlich hat die Matrix A Rang 1, wenn $a = 4$, denn alle Spalten (bzw. Zeilen) von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

sind paarweise linear abhängig. □

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse B^{-1} folgender Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir fangen mit dem Tableau $(B|E)$ an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es sei z_i die i-te Zeile. Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $-z_1$ und z_2 mit z_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_3 mit $z_3 + 2z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_2 mit $z_2 + z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen z_1 mit $z_1 + 2z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Die Inverse ist also gegeben durch

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

(Bepunktung:

- *Mindestens 2 Punkte, falls eine Spalte oder eine Zeile von* $\boldsymbol{B}^{-1}$ *korrekt ausgerechnet wurde.*
- *Bis zu 2 Punkte für sinnvolle Schritte.*
- *1 Punkt, falls* $\det(\boldsymbol{B}) = 1$ *korrekt ausgerechnet wurde.*
- *4 Punkte nur wenn alles richtig ist.*

)

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(8-\lambda) - 6 \cdot (-4) \\ &= -16 + 2\lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 24 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 4). \end{aligned}$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Die Eigenwerte von C sind also 2 und 4.

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 2$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 2E = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $x_1 = -x_2$. Also gilt

$$V_2 = \operatorname{Ker}(C - 2E) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 4$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $3x_1 = -2x_2$. Also gilt

$$V_4 = \operatorname{Ker}(C - 4E) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$ □

Aufgabe 10 (5 Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

(a) Finden Sie alle lokalen Maximalstellen von f im offenen Intervall $(0, 3)$.

(b) Finden Sie alle globalen Minimalstellen von f im abgeschlossenen Intervall $[0, 3]$.

(c) Finden Sie alle Wendepunkte von f.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 3 Punkte)* Wir berechnen und faktorisieren die ersten zwei Ableitungen von f:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} = (1-x)\mathrm{e}^{1-x},$$
$$f''(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} = (x-2)\mathrm{e}^{1-x}.$$

Die einzige Nullstelle von f' ist also $x = 1$. Es gilt $f''(1) = -1 < 0$. Dementsprechend ist

$$x = 1$$

die einzige lokale Maximalstelle von f im offenen Intervall $(0, 3)$.

(Bepunktung: 1 Punkt für f'. 1 Punkt für f''. 1 Punkt für die lokale Maximalstelle.)

(b) *(Bepunktung: 1 Punkt)* Wir müssen nun auch die Grenzen des Definitionsintervalls berücksichtigen, also 0 und 3. Wir berechnen

$$f(0) = 0,$$
$$f(3) = 3\mathrm{e}^{-2}.$$

Im Intervall $[0, 3]$ gibt es genau eine globale Minimalstelle, nämlich

$$x = 0.$$

(c) *(Bepunktung: 1 Punkt.)* Die zweite Ableitung f'' wechselt ihr Vorzeichen an der einzigen Wendestelle $x = 2$. Der einzige Wendepunkt von f ist also

$$(2, f(2)) = (2, 2\mathrm{e}^{-1}).$$

(Bepunktung: Für den Punkt reicht die Angabe der Wendestelle $x = 2$.) □

Aufgabe 11 (7 Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y)(x^2 + y - 2).$$

(a) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f.

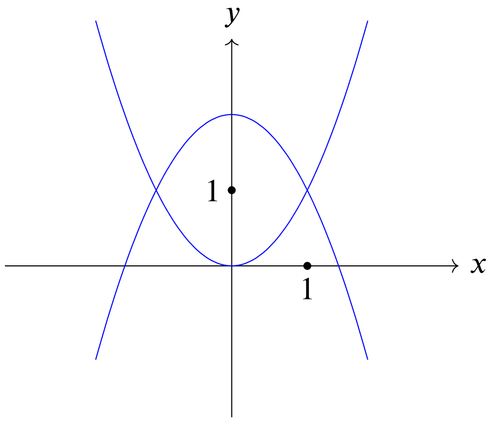
(b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hesse-Matrix $H f(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Minimalstellen, lokalen Maximalstellen und Sattelpunkte von f.

Lösung. (a) *(Bepunktung: 1 Punkt)* Die Nullstellenmenge von f ist die Vereinigung von zwei Parabeln.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2+2\}$$



(b) Zuerst multiplizieren wir aus:

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^2 + 2y.$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Der Gradient von f is gegeben durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) \\ \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ -2y + 2 \end{pmatrix}$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Die Hesse-Matrix von f is gegeben durch

$$H f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) \\ \partial_y \partial_x f(x, y) & \partial_y \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) *(Bepunktung: 2 Punkte)* Die kritischen Punkte von f sind die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\nabla f(x, y) = 0$. Wir müssen also folgendes (nicht lineares) Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0, \\ -2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y = 1$. Aus der ersten Gleichung folgt $x \in \{-1, 0, 1\}$. Wir haben also drei kritische Punkte:

$$(-1, 1), \quad (0, 1), \quad (1, 1).$$

(Bepunktung: 1 Punkt für den ersten gefundenen kritischen Punkt, 2 Punkte falls alle drei gefunden werden.)

(d) *(Bepunktung: 2 Punkte)* Im kritischen Punkt $(-1, 1)$ ist

$$Hf(-1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $Hf(-1, 1)$ sind 8 und -2 und haben beide verschiedene Vorzeichen, also ist $(-1, 1)$ ein Sattelpunkt.

Im kritischen Punkt $(0, 1)$ ist

$$Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $Hf(0, 1)$ sind -4 und -2, beide negativ, also ist $(0, 1)$ eine lokale Maximalstelle.

Im kritischen Punkt $(1, 1)$ ist

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $Hf(1, 1)$ sind 8 und -2 und haben beide verschiedene Vorzeichen, also ist $(1, 1)$ ein Sattelpunkt.

(Bepunktung: 1 Punkt für den ersten korrekt bestimmten kritischen Punkt, 2 Punkte falls alle gefundenen kritischen Punkte korrekt bestimmt werden.) □

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x + y^2.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Lösung. *(Bepunktung: 1 Punkt für beide Gradienten)* Wir berechnen die Gradienten von f und von $g(x,y) = x^2 - 2x + y^2$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + x^2 - 2 \\ 2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

(Bepunktung: 1 Punkt für die Lagrange-Bedingung) Wir stellen die Lagrange-Bedingung auf:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 2 = 2\lambda(x-1) \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

(Bepunktung: 1 Punkt, falls mindestens 2 Punkte von 4 gefunden werden) Aus der 2. Bedingung folgt $2y(\lambda - 1) = 0$, also $y = 0$ oder $\lambda = 1$.

Falls wir $y = 0$ in die 3. Gleichung einsetzen, dann bekommen wir $x^2 - 2x = 0$, also $x = 0$ oder $x = 2$. Damit finden wir die Punkte $(0,0)$ und $(2,0)$.

Falls wir $\lambda = 1$ in die 1. Gleichung einsetzen, dann bekommen wir $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Wir faktorisieren $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$. Also muss $x \in \{0, 1, -2\}$ gelten. Mit der 3. Bedingung finden wir die jeweiligen Koordinaten y. Damit finden wir die Punkte $(0,0)$ (schon gefunden), $(1,1)$ und $(1,-1)$. (Die Wahl $x = -2$ liefert $8+y^2 = 0$ und diese Gleichung hat keine reelle Lösung.)

Insgesamt erhalten wir die vier Punkte

$$(0,0), \quad (1,1), \quad (1,-1), \quad (2,0).$$

(Bepunktung: 1 Punkt für eine korrekte Diskussion von Extremstellen) Wir berechnen

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = f(1,-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 2 + 1 = -\frac{5}{12}, \quad f(2,0) = 4 + \frac{8}{3} - 4 = \frac{8}{3}.$$

Damit besitzt f zwei globale Minimalstellen, nämlich $(1,1)$ und $(1,-1)$, und eine einzige globale Maximalstelle, nämlich $(2,0)$. □

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Lösung folgender Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \quad \text{mit } y(0) = 2 \text{ und } y'(0) = 10$$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt) Das charakeristiche Polynom der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda + 1)(\lambda - 5).$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Die allgemeine (homogene) Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Nun bestimmen wir c_1, c_2 durch die Anfangsbedingungen. Zuerst berechnen wir

$$y'(x) = -c_1 \mathrm{e}^{-x} + 5c_2 \mathrm{e}^{5x}.$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Es muss gelten

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 2, \\ y'(0) &= -c_1 + 5c_2 = 10. \end{aligned}$$

Also ist $c_1 = 0$ und $c_2 = 2$. Daher ist die gesuchte Lösung gegeben durch

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{5x}.$$

□