Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 14 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^4 d(x, y)$$

mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von

$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge

$$S = \left\{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

an.

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3,$$

und deren Stabilität und

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t, 1) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} x\,(t, 4)\,.$$

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 5x^3 - 4x^5 - y,$$

und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$\cos(x + y^2) + ay + (by\cos(x + y^2) + 3x)y' = 0.$$

Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Aufgabe 3 *(4+4+2)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Es sei $G := \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x \le 2,\, x \le y \le x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\gamma \langle v(X), dX\rangle$, wobei γ den Rand von G einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x,y,z) = r(x,y,z)(x^2, xy^4, \sin(z)\cosh(xy))^T$$

mit $r(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X)\rangle \, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt, mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes.

Aufgabe 4 *(2+2+3+3)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x+iy) = \left(x^2 - y^2 + e^{-x}\cos(y)\right) + i\left(2xy + e^{-x}\sin(\alpha y)\right)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz \quad \text{und} \quad \oint_{|z|=6} (z-5)^{-1}\, dz.$$

c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz.$$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n n^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n n^2.$$