Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
kyb, mecha, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie
$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx.$$

b) Berechnen Sie
$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^4 d(x, y)$$
mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von
$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge
$$S = \left\{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
an.

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = x - x^3,$$
und deren Stabilität und
$$\lim_{t\to\infty} x\,(t, 1) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} x\,(t, 4)\,.$$

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung
$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 5x^3 - 4x^5 - y,$$
und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung
$$\cos(x + y^2) + ay + (by \cos(x + y^2) + 3x)y' = 0.$$
Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Aufgabe 3 *(4+4+2)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Es sei $G := \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 2,\, x \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\gamma \langle v(X), dX\rangle$, wobei γ den Rand von G einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x,y,z) = r(x,y,z)(x^2, xy^4, \sin(z)\cosh(xy))^T$$

mit $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X)\rangle \, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt, mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes.

Aufgabe 4 *(2+2+3+3)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x+iy) = \left(x^2 - y^2 + e^{-x}\cos(y)\right) + i\left(2xy + e^{-x}\sin(\alpha y)\right)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz \quad \text{und} \quad \oint_{|z|=6} (z-5)^{-1}\, dz.$$

c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz.$$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n n^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n n^2.$$

Aufgabe 5 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation $w = f(z)$ mit

$$f(-i) = -1, \qquad f(1) = 0, \qquad f(i) = 1$$

und das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{625 + x^4} dx.$$

c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{3}{2} + \sin(t)}{10 + 8\cos(t)} dt.$$

Aufgabe 6 *(3+2+3+2)*

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der Funktion

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0, 1), \\ -1, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{z} dz.$$

c) Betrachten Sie die lineare Laplacegleichung

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

auf dem Gebiet $\Omega = \{(r, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ r \in [0, 1)\}$ mit Neumann-Randbedingungen $\partial_r u = 0$ für $r = 1$. Machen Sie den Ansatz $u(r, \varphi) = Y(\varphi)Z(r)$ und leiten Sie Differentialgleichungen für Y und Z her. Geben Sie mindestens eine Lösung der linearen Laplacegleichung an.

d) Sei $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} \sin(|n|^4) z^n$. Bestimmen Sie $\int_{|z|=\frac{1}{3}} f(z) dz$.