Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
kyb, mecha, phys

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(1+3+4+2)*

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_\Omega (x^2 + y^2)^4 d(x, y)$$

mit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$ mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von

$$P = \left\{(x, y, z) : 0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4z \leq 1\right\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge

$$S = \left\{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

an.

Lösung

a) Es ist

$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx = \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{1}{4} y^4\right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 x^4 + \frac{1}{4} x^4 dx = \left[\frac{1}{4} x^5\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Wir verwenden Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

mit $r \in [0, 2]$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (x^2 + y^2)^4 d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^9 dr d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^2 r^9 dr d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{10} r^{10}\right]_0^2 + \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{10} r^{10}\right]_0^2 \\
&= \frac{\pi}{10} 2^{10} = \frac{512\pi}{5}.
\end{aligned}$$

c) Wir führen Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ ein. Damit ist $x^2 + y^2 = r^2$ und $r^4 \leq 4z \leq 1$ bzw. $r^4/4 \leq z \leq 1/4$. Für den Schwerpunkt gilt die Formel

$$S(P) = \frac{\displaystyle\int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)}{\int_P 1 d(x, y, z)}.$$

Wir berechnen daher zunächst das Volumen von P. Es gilt

$$V(P) = \int_P 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r dz d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 [rz]_{z=r^4/4}^{1/4} dr = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 (r - r^5) dr$$
$$= \frac{1}{2}\pi \left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Zusätzlich müssen die Integrale über die Komponenten berechnet werden. Da P rotationssymmetrisch zur z-Achse ist, muss der Schwerpunkt auf der z-Achse liegen und somit die x- und y-Komponente gleich 0 sein. Dies kann auch schnell nachgerechnet werden. Es ist

$$\int_P x d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r^2 \cos(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi)(1 - r^4) d\varphi dr$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^4) \sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0,$$

$$\int_P y d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r^2 \sin(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi)(1 - r^4) d\varphi dr$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^4)(-\cos(\varphi))]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0,$$

und

$$\int_P z d(x, y, z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} rz dz d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r z^2\right]_{z=r^4/4}^{1/4} d\varphi dr$$
$$= \frac{1}{8}\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(r - r^9) dr = \frac{1}{8}\pi \left[\frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{20}r^{10}\right]_{r=0}^1 = \frac{1}{8}\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20}\right) = \frac{\pi}{40}.$$

Damit ist der Schwerpunkt von P gegeben durch

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\frac{\pi}{40}}{\frac{\pi}{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

d) Wir sehen in S, dass die y-Komponente durch x und die z-Komponente durch x und y ausgedrückt werden können. Die Normalbereichsdarstellung von S ergibt sich durch

$$S = \left\{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$= \{(x, y, z) : -1 \leq y \leq 1; -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}; -\sqrt{4 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}\}$$
$$= \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; -\sqrt{4 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}\}$$

Aufgabe 2 *(3+3+4)*

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$

und deren Stabilität und

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t,1) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} x\,(t,4)\,.$$

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + 5x^3 - 4x^5 - y,$$

und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

c) Gegeben ist die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Differentialgleichung

$$\cos(x+y^2) + ay + (by\cos(x+y^2) + 3x)y' = 0.$$

Für welche Werte von a und b ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.

Lösung

a) Damit ein Fixpunkt vorliegt, muss $\frac{dx}{dt} = x - x^3 \stackrel{!}{=} 0$ gelten. Dies liefert $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$.
Wegen $\frac{d}{dx}x - x^3\Big|_{x=\pm 1} = 1 - 3x^2\Big|_{x=\pm 1} < 0$ sind $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ stabile Fixpunkte und wegen $\frac{d}{dx}x - x^3\Big|_{x=0} = 1 - 3x^2\Big|_{x=0} > 0$ ist $x_1 = 0$ ein instabiler Fixpunkt.
Daher gelten

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t,1) = 1, \quad \lim_{t\to-\infty} x\,(t,4) = 1.$$

b) Die Fixpunktbedingung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ -x + 5x^3 - 4x^5 - y \end{pmatrix}.$$

Damit muss $y = 0$ und $-x + 5x^3 - 4x^5 = 0$ gelten und somit $P_1 = (0,0)$, $P_{2/3} = (\pm 1, 0)$ und $P_{4/5} = (\pm\frac{1}{2}, 0)$. Die Linearisierung ist

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 15(x^*)^2 - 20(x^*)^4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Linearisierung um P_1: Die Eigenwerte von

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Da $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$ gilt, ist P_1 linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

Linearisierung um $P_{2/3}$**:** Die Eigenwerte von

$$A(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$. Da $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$ gilt, sind $P_{2,3}$ linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

Linearisierung um $P_{4/5}$**:** Die Eigenwerte von

$$A(P_{4/5}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$. Da ein positiver Eigenwert existiert, sind $P_{4,5}$ linear sowie nichtlinear instabil.

c) Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss für $g(x,y) = \cos(x+y^2) + ay$ und $h(x,y) = by\cos(x+y^2) + 3x$ folgende Bedingung gelten

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1}$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y\sin(x+y^2) + a \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -by\sin(x+y^2) + 3.$$

Für $a = 3$ und $b = 2$ ist die Bedingung immer erfüllt.
Für das Potential Φ mit $a = 3$ und $b = 2$ muss $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dx} = g$ und $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dy} = h$ gelten. Aus der ersten Bedingung können wir auf

$$\Phi(x,y) = \int \cos(x+y^2) + 3y dx = \sin(x+y^2) + 3xy + C(y)$$

schließen, wobei $C(y)$ eine Funktion ist, die nur von y abhängt. Mit der zweiten Bedingung kommen wir auf

$$\partial_y\Phi(x,y) = 2y\cos(x+y^2) + 3x + C'(y) \stackrel{!}{=} 2y\cos(x+y^2) + 3x.$$

Dies ist für $C'(y) = 0$ erfüllt und somit ist das Potential gegeben durch

$$\Phi(x,y) = \sin(x+y^2) + 3xy + \widetilde{C}.$$

Aufgabe 3 *(4+4+2)*

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = \left(x^3, y^3, z^3\right)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

mit Hilfe des Gaussschen Integralsatzes.

b) Es sei $G := \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 2,\, x \leq y \leq x^2\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\gamma \langle v(X), dX \rangle$, wobei γ den Rand von G einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

c) Sei M die Fläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\; 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(x,y,z) = r(x,y,z)(x^2, xy^4, \sin(z)\cosh(xy))^T$$

mit $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X) \rangle \, d\sigma(X),$$

wobei n das Einheitsnormalenfeld der Menge M bezeichnet, welches in die positive z-Richtung zeigt, mit Hilfe des Stokeschen Integralsatzes.

Lösung

a) Es ist

$$\mathrm{div} f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Da Ω ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und f ein C^1-Vektorfeld ist, ergibt sich mit dem Gaussschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle d\sigma &= \int_\Omega \operatorname{div} f(x,y,z) d(x,y,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3r^2 \sin^2(\theta)\cos^2(\varphi) + 3r^2 \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + 3r^2\cos^2(\theta)) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (3\sin^2(\theta) + 3\cos^2(\theta)) r^4 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 3r^4 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi 3r^4 \sin(\theta) d\theta dr = 2\pi \int_0^1 3r^4 \left[-\cos(\theta)\right]_0^\pi dr \\
&= 4\pi \int_0^1 3r^4 dr = 12\pi \left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^1 = \frac{12}{5}\pi.
\end{aligned}$$

b) Es werden beide Lösungswege in der Aufgabe verlangt!

- *Direkte Berechnung des Integrals:* Der Rand von G kann folgendermaßen parametrisiert werden. Es sei $\partial G = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ mit

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},\ 1 \le t \le 2,$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix},\ 2 \le t \le 4,$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},\ 1 \le t \le 2.$$

Wir berechnen daher

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_1^2 \langle v(\gamma_1(t)), \dot{\gamma_1}(t)\rangle\, dt = \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_1^2 t dt = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_2^4 \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

und

$$\int_{\gamma_3} \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_2^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_2^1 1 dt = -1.$$

Somit ergibt sich

$$\oint_\gamma \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

– *Berechnung des Integrals mit Hilfe des Integralsatzes von Green:* Es ist

$$\mathrm{rot} v(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2}.$$

Wir wenden den Integralsatz an und erhalten

$$\begin{aligned}\oint_G \left\langle v(x,y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_G \mathrm{rot} v(x,y) d(x,y) \\ &= \int_G \frac{x^2}{y^2} d(x,y) = \int_1^2 \int_x^{x^2} \frac{x^2}{y^2} dy dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_x^{x^2} dx \\ &= \int_1^2 (-1+x) dx = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Aus dem Satz von Stokes folgt

$$I = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle .$$

Da $r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ist, verschwindet r überall in M, da hier $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gilt, und somit auch auf ∂M. Somit gilt $F(X) = 0$ in M und auf ∂M.

Somit folgt

$$I = \int_M \langle \mathrm{rot} F(X), n(X) \rangle \, d\sigma(X) = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle = 0.$$

Aufgabe 4 *(2+2+3+3)*

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$f(x+iy) = \left(x^2 - y^2 + e^{-x}\cos(y)\right) + i\left(2xy + e^{-x}\sin(\alpha y)\right)$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz \quad \text{und} \quad \oint_{|z|=6} (z-5)^{-1} dz.$$

c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz.$$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n n^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n n^2.$$

Lösung

a) Es seien $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-x}\cos(y)$ und $v(x,y) = 2xy + e^{-x}\sin(\alpha y)$. Wir überprüfen die Gültigkeit der Cauchy-Riemmanschen Differentialgleichungen in Abhängigkeit von α. Die Bedingung lautet

$$\partial_x u(x,y) = 2x - e^{-x}\cos(y) \stackrel{!}{=} 2x + \alpha e^{-x}\cos(\alpha y) = \partial_y v(x,y),$$
$$\partial_y u(x,y) = -2y - e^{-x}\sin(y) \stackrel{!}{=} -2y + e^{-x}\sin(\alpha y) = -\partial_x v(x,y).$$

Damit ist f für $\alpha = -1$ komplex differenzierbar.

b) Da die Singularität $z_0 = 0$ des Integranden wegen $|z_0 - 2| = 2 > 1$ außerhalb des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereiches liegt, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz = 0.$$

Für das zweite Integral nutzen wir die Cauchysche Integralformel mit $f(z) = 1$. Da f holomorph ist und $|5| < 6$, erhalten wir

$$\oint_{|z|=6} (z-5)^{-1}\, dz = 2\pi i \cdot f(5) = 2\pi i.$$

c) Wegen $|-4| > 2$ ist $z^* = -1$ die einzige relevante Singularität des Integranden f. Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z); -1).$$

Da es sich bei z^* um eine doppelte Polstelle handelt, ergibt sich

$$\operatorname{Res}(f(z); -1) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+4}\right) = \lim_{z\to -1} \frac{4}{(z+4)^2} = \frac{4}{9}$$

und folglich

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = \frac{8}{9}\pi i.$$

Alternativ: Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit $f(z) = \dfrac{z}{z+4}$ an. Da f im Inneren des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereich holomorph ist, erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) \qquad = 2\pi i \cdot \frac{4}{(z+4)^2}\bigg|_{z=-1} = \frac{8}{9}\pi i.$$

d) Der erste Summand hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^2/2^n|}} = \frac{2}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 2.$$

Der zweite Summand hat den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^2|}} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

Wir untersuchen die Konvergenz an den Randwerten. Da die Folgeglieder bei dem ersten Summanden für $|z| = 2$ keine Nullfolge bilden, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = \infty,$$

bei dem zweiten Summanden für $|z| = 1$ gilt analog

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \infty.$$

Also ist der Konvergenzbereich gerade die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 5 *(3+4+3)*

a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation $w = f(z)$ mit

$$f(-i) = -1, \qquad f(1) = 0, \qquad f(i) = 1$$

und das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{625 + x^4} dx.$$

c) Bestimmen Sie

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\frac{3}{2} + \sin(t)}{10 + 8\cos(t)} dt.$$

Lösung:

a) Die Möbiustransformation zu drei gegebenen Punkten berechnet sich über die Formel

$$\frac{(w - w_2)(w_3 - w_1)}{(w - w_1)(w_3 - w_2)} = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}$$

mit $f(z_1) = f(-i) = -1 = w_1$, $f(z_2) = f(1) = 0 = w_2$ und $f(z_3) = f(i) = 1 = w_3$. Daraus folgt

$$\frac{(w - 0)(1 - (-1))}{(w - (-1))(1 - 0)} = \frac{(z - 1)(i - (-i))}{(z - (-i))(i - 1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2w}{w + 1} = \frac{2i(z - 1)}{(z + i)(i - 1)}.$$

Wir multiplizieren jeweils mit dem Nenner und formen um

$$\begin{aligned}
&(2w)(iz - 1 - z - i) = (2iz - 2i)(w + 1) \\
&\Rightarrow 2iwz - 2w - 2wz - 2iw = 2iwz - 2iw + 2iz - 2i \\
&\Rightarrow w(-1 - z) = iz - i \\
&\Rightarrow w = \frac{-iz + i}{z + 1} = f(z).
\end{aligned}$$

Es ist $f(0) = i$, $f(2) = -\frac{1}{3}i$ und $f(-1) = \infty$. Daher wird die reelle Achse auf die imaginäre Achse abgebildet.

Alternative Begründung für Bild: Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \frac{-ix+i}{x+1} = i\frac{-x+1}{x+1}$. Daher wird die reelle Achse auf die imaginäre Achse abgebildet.

Alternative 1: Eine Möbiustransformation hat die folgende allgemeine Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Über die gegebenen Punkte kann die Möbiustransformation auch über ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten gelöst werden. Es muss

$$\frac{-ia+b}{-ic+d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = 0, \quad \frac{ia+b}{ic+d} = 1$$

gelten. Daraus folgt $-ia + b = ic - d$, $a = -b$ und $ia + b = ic + d$.

Es folgen $a = -b$, $b = ic$ und $d = ia$. Damit kann zum Beispiel $a = 1$, $b = -1$, $d = i$ und $c = i$ gewählt werden. Dann ist

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z-1}{iz+i}.$$

Es ist $f(0) = i$, $f(2) = -\frac{1}{3}i$ und $f(-1) = \infty$. Daher wird die reelle Achse auf die imaginäre Achse abgebildet.

Alternative 2: Eine Möbiustransformation hat die folgende allgemeine Form

$$f(z) = \frac{z+b}{cz+d}.$$

Über die gegebenen Punkte kann die Möbiustransformation auch über ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten gelöst werden. Es muss

$$\frac{-i+b}{-ic+d} = -1, \quad \frac{1+b}{c+d} = 0, \quad \frac{i+b}{ic+d} = 1$$

gelten. Daraus folgt $-i + b = ic - d$, $b = -1$ und $i + b = ic + d$.

Wir addieren die erste und letzte Gleichung und erhalten $2b = 2ic$ und somit $c = -ib = i$. Einsetzen und Umformen nach d ergibt $d = i$ und somit

$$f(z) = \frac{z+b}{cz+d} = \frac{z-1}{iz+i}.$$

Es ist $f(0) = i$, $f(2) = -\frac{1}{3}i$ und $f(-1) = \infty$. Daher wird die reelle Achse auf die imaginäre Achse abgebildet.

b) Die Nullstellen des Nenners lauten $z_1 = 5e^{i\pi/4}$, $z_2 = 5e^{3i\pi/4}$, $z_1 = 5e^{5i\pi/4}$ und $z_1 = 5e^{7i\pi/4}$.
Der Grad vom Nennerpolynom ist größer gleich der Grad des Zählerpolynoms + 2. Daher gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{625+x^4} dx = 2\pi i \sum_{z_1,z_2} \operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{625+z^4}, z_k\right),$$

da diese die Nullstellen in der oberen Halbebene sind.
Es ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{625+z^4}, z_1\right) = \frac{2z^2}{\frac{d}{dz}(625+z^4)}\bigg|_{z=z_1} = \frac{2z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{10e^{i\pi/4}}$$

und

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2z^2}{625+z^4}, z_2\right) = \frac{2z^2}{\frac{d}{dz}(625+z^4)}\bigg|_{z=z_2} = \frac{2z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{10e^{3i\pi/4}}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{625+x^4}dx &= 2\pi i\left(\frac{1}{10e^{i\pi/4}} + \frac{1}{10e^{3i\pi/4}}\right)\\ &= 2\pi i\left(\frac{e^{2\pi i/4}+1}{10e^{3i\pi/4}}\right) = 2\pi i\left(\frac{1+i}{5\sqrt{2}(-1+i)}\right) = \frac{2\pi i}{5\sqrt{2}}(-i) = \frac{\sqrt{2}}{5}\pi.\end{aligned}$$

c) Das Integral liegt in der folgenden Form vor

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{3}{2}+\sin(t)}{10+8\cos(t)}dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{3+2\sin(t)}{5+4\cos(t)}dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} R(\cos(t),\sin(t))dt.$$

Wir benutzen die Parametrisierung $z = e^{it}$ mit $dt = \frac{dz}{iz}$. Damit können wir das Integral schreiben als

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{3+2\sin(t)}{5+4\cos(t)}dt &= \int_0^{2\pi} R(\cos(t),\sin(t))dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz\\ &= \int_{|z|=1} \frac{3+2\frac{z-z^{-1}}{2i}}{5+4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1} \frac{3-i(z-z^{-1})}{5+2(z+z^{-1})}\frac{1}{iz}dz\\ &= \int_{|z|=1} \frac{-iz^2+3z+i}{2z^2+5z+2}\frac{1}{iz}dz = \int_{|z|=1} f(z)dz.\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $z_1 = -2,\ z_2 = -\frac{1}{2}$ und $z_3 = 0$. Dabei sind $z_2 = -\frac{1}{2}$ und $z_3 = 0$ relevant, da diese im Einheitskreis liegen. Der Residuensatz liefert

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{3}{2}+\sin(t)}{10+8\cos(t)}dt = \frac{1}{2}\pi i\left(\operatorname{Res}(f; z=0) + \operatorname{Res}\left(f; z=-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Es ist

$$\operatorname{Res}(f(z);0) = \frac{-iz^2+3z+i}{2z^2+5z+2}\frac{1}{i}\bigg|_{z=0} = \frac{i}{2}\frac{1}{i} = \frac{1}{2}$$

und

$$\operatorname{Res}(f(z);z_1) = \frac{-iz^2+3z+i}{2iz(z+2)}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}-3i(-\frac{1}{2})+1}{2(-\frac{1}{2})\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i\right) = -\frac{1}{2}-i.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\frac{3}{2}+\sin(t)}{10+8\cos(t)}dt = \frac{1}{2}\pi i\left(\operatorname{Res}(f; z=0) + \operatorname{Res}\left(f; z=-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-i\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Aufgabe 6 *(3+2+3+2)*

a) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung der Funktion

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1, & x \in [0,1), \\ -1, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie das Wegintegral

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{z} dz.$$

c) Betrachten Sie die lineare Laplacegleichung

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

auf dem Gebiet $\Omega = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r \in [0,1)\}$ mit Neumann-Randbedingungen $\partial_r u = 0$ für $r = 1$. Machen Sie den Ansatz $u(r,\varphi) = Y(\varphi)Z(r)$ und leiten Sie Differentialgleichungen für Y und Z her. Geben Sie mindestens eine Lösung der linearen Laplacegleichung an.

d) Sei $f(z) = \sum_{n=-5}^{\infty} \sin(|n|^4) z^n$. Bestimmen Sie $\int_{|z|=\frac{1}{3}} f(z)dz$.

Lösung:

a) Sei $\varphi \in C_0^\infty$. Die dazugehörige Distribution T_H ist gegeben durch

$$T_H(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \int_1^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Die distributionelle Ableitung der Funktion H ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_H'(\psi) = -T_H(\varphi') &= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_0^1 \varphi'(x)\,dx + \int_1^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= (\varphi(0) - \varphi(-\infty)) - (\varphi(1) - \varphi(0)) + (\varphi(\infty) - \varphi(1)) \\ &= 2\varphi(0) - 2\varphi(1), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass φ im Unendlichen verschwindet wegen $\varphi \in C_0^\infty$.

b) Der Cauchysche Integralsatz ist nicht anwendbar, da die Abbildung $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ nirgends holomorph ist. Für die Parametrisierung $z(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ des Einheitskreises ergibt sich

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re}(z(t))^2}{z(t)} \dot{z}(t)\,dt = i\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt =: iI$$

Per partieller Integration erhalten wir

$$I = \underbrace{\big[\sin(t)\cos(t)\big]_{t=0}^{2\pi}}_{=0} + \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2(t)\,dt = 2\pi - I$$

und folglich $I = \pi$. Also gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{Re}(z)^2}{z}\,dz = i\pi.$$

c) Einsetzen des Ansatzes ergibt zunächst (Argumente werden weggelassen)

$$0 = YZ'' + \frac{1}{r}YZ' + \frac{1}{r^2}Y''Z.$$

Wir dividieren durch $u = YZ$ und erhalten

$$0 = \frac{Z'' + 1/rZ'}{Z} + \frac{1/r^2Y''}{Y}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit r^2. Dies liefert

$$\frac{r^2Z'' + rZ'}{Z} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Da die linke Seite der Gleichung nur von r und die rechte Seite nur von φ abhängt, können diese nur konstant sein, d.h. es existiert ein λ, so dass

$$\frac{r^2Z'' + rZ'}{Z} = \lambda, \qquad \frac{Y''}{Y} = -\lambda.$$

Daher ergeben sich für Y und Z folgende Gleichungen

$$Y'' = -\lambda Y, \qquad r^2Z'' + rZ' = \lambda Z.$$

Offensichtlich ist jede konstante Funktion Lösung der DGL, d.h. eine Lösung ist z.B. $u = 0$.

d) Sei $a_n = \sin(|n|^4)$. Für den Konvergenzradius gilt $R = 1$. Da der Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ vom Integrationsweg eingeschlossen wird und $R > 1/3$ gilt, folgt

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} f(z)dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \sin(1).$$