Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ingo Steinwart
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, mecha, phys, tkyb

Bitte unbedingt beachten:

- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen **separate eigene** Blätter.
- Bitte beschriften Sie **jeden** Ihrer Zettel mit **Namen und Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Din A4-Seiten.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone, Smartwatches etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche **Lösungswege und Begründungen** anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage zur Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*2 + 2 + 3 + 3 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{5+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}\right)^{-1}.$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^4 + 8 = 0.$$

Geben Sie die Lösung sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

(c) Das Polynom

$$q(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$$

hat die Nullstelle $1 + \mathrm{i}$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms q.

(d) Es seien die Punkte $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ und $C = (3, 3, 0)$ gegeben. Wir betrachten das Dreieck $\Delta = ABC$. Berechen Sie den Flächeninhalt von Δ und die Hessesche Normalenform der Ebene, in welcher Δ liegt.

Aufgabe 2 (*6 + 2 + 2 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+8n} - \sqrt{n^4+5}\right)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-2)^{n+1}}{3^{n-2} - 2^{2n-1}}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{1/x}$.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz oder Divergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n}\mathrm{i}\right)^n$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} x^n.$$

Aufgabe 3 *(2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $\sqrt{3}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(d) Sei $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f^{(15)}(0)$.

(e) Gegeben sei das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy}\sin(z) + y \\ \mathrm{e}^{xy}\sin(z) + x \\ \mathrm{e}^{xy}\cos(z) - z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Divergenz von w.

Aufgabe 4 *(4 + 2 + 3 + 1 Punkte)*

(a) Es sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 5x - y \end{pmatrix}.$$

Es sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S), M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, ob A invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, ob B diagonalisierbar ist.

(d) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert 3. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 3.

Aufgabe 5 (*5 + 2 + 1 + 2 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int (9x^2 + 2x + 5)\,\sqrt[5]{3x^3 + x^2 + 5x + 8}\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{3x - x^2}\,dx.$

(b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 + \sqrt{x}} dx.$$

(c) Begründen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Es sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, n)$ der Raum der reellen Polynome mit Grad $\leq n$ und $p_0, p_1, ..., p_n$ die Standardbasis $p_j(x) = x^j$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 4) \to \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, 2),$$
$$p \mapsto p'' = \frac{d^2}{dx^2}p.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von T bezüglich obigen Standardbasen und bestimmen Sie $\dim\ker(T)$ und $\dim\mathrm{ran}(T)$.

Aufgabe 6 (*3 + 4 + 3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, \ln(2)] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh(2t) \\ 2t \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^3 - 12x + y)\mathrm{e}^y.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f mit mathematischer Begründung.

(c) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \sin(x + y) + 2x - 4y$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii) Wieso existiert in einer Umgebung des Punktes $x = 0$ eine Funktion $y = g(x)$, sodass $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$?

(iii) Bestimmen Sie $g'(0)$.