Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ingo Steinwart
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, mecha, phys, tkyb

Bitte unbedingt beachten:

- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen **separate eigene** Blätter.
- Bitte beschriften Sie **jeden** Ihrer Zettel mit **Namen und Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Din A4-Seiten.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone, Smartwatches etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche **Lösungswege und Begründungen** anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage zur Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(2 + 2 + 3 + 3 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{5+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}\right)^{-1}.$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^4 + 8 = 0.$$

Geben Sie die Lösung sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

(c) Das Polynom

$$q(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$$

hat die Nullstelle $1 + \mathrm{i}$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms q.

(d) Es seien die Punkte $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ und $C = (3, 3, 0)$ gegeben. Wir betrachten das Dreieck $\Delta = ABC$. Berechen Sie den Flächeninhalt von Δ und die Hessesche Normalenform der Ebene, in welcher Δ liegt.

Lösung:

(a) Wir erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners:

$$\begin{aligned} z = \left(\frac{5+2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}\right)^{-1} &= \frac{3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \frac{3\mathrm{i}(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} \\ &= \frac{6+15\mathrm{i}}{29}. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{6}{29} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{15}{29}.$$

(b) Wir schreiben dazu $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} & z^4 + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & r^4 \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} = -8 \\ \Leftrightarrow\ & r^4 \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} = 2^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \\ \Leftrightarrow\ & r^4 = 2^3 \quad \text{und} \quad 4\mathrm{i}\theta = \mathrm{i}\pi + 2\pi\mathrm{i}k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & r = 2^{\frac{3}{4}} \quad \text{und} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & r = 2^{\frac{3}{4}} \quad \text{und} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$

Die Lösungen von $z^4 + 8 = 0$ sind somit

$$\begin{aligned} z_1 &= 2^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}(1+\mathrm{i}) = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}\mathrm{i}, \\ z_2 &= 2^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}(-1+\mathrm{i}) = -\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}\mathrm{i}, \\ z_3 &= 2^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}(-1-\mathrm{i}) = -\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}\mathrm{i}, \\ z_4 &= 2^{\frac{3}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}(1-\mathrm{i}) = \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

(c) Da $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ eine Nullstelle von q ist und q reelle Koeffizienten hat, so ist nach der Vorlesung $z_2 = 1 - \mathrm{i}$ ebenso eine Nullstelle von q.

Daher ist

$$(z - 1 - \mathrm{i})(z - 1 + \mathrm{i}) = z^2 - 2z + 2$$

ein Teiler von q. Mit Polynomdivision erhalten wir

$$\begin{array}{llllll}
(z^4 & -5z^3 & +10z^2 & -10z & +4) & : (z^2 - 2z + 2) = z^2 - 3z + 2. \\
z^4 & -2z^3 & +2z^2 & & & \\
\hline
 & -3z^3 & +8z^2 & -10z & +4 & \\
 & -3z^3 & +6z^2 & -6z & & \\
\hline
 & & 2z^2 & -4z & +4 & \\
 & & 2z^2 & -4z & +4 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Damit ist

$$q(z) = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 - 3z + 2\right) = (z^2 - 2z + 2)(z - 2)(z - 1).$$

Damit sind die anderen 2 Nullstellen $z_3 = 2$ und $z_4 = 1$.

(d) Wir berechnen die Verbindungsvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt ist dann

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche von $\Delta = ABC$ ist

$$|\Delta| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{66}.$$

Die Ebene $\mathcal{E}$, in der Δ liegt, hat die Hessesche Normalform

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, n \rangle = d\}$$

mit

$$n = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad d = \langle A, n \rangle = \frac{-15}{\sqrt{66}}.$$

Aufgabe 2 (*6 + 2 + 2 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+8n} - \sqrt{n^4+5}\right)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + (-2)^{n+1}}{3^{n-2} - 2^{2n-1}}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{1/x}$.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz oder Divergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{n}\mathrm{i}\right)^n$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(n+1)!} x^n.$$

Lösung:

(a) (i) Wir schreiben

$$\begin{aligned} a_n &= n\frac{\left(\sqrt{n^4+8n} - \sqrt{n^4+5}\right)\left(\sqrt{n^4+8n} + \sqrt{n^4+5}\right)}{\sqrt{n^4+8n} + \sqrt{n^4+5}} \\ &= n\frac{(n^4+8n) - (n^4+5)}{\sqrt{n^4+8n} + \sqrt{n^4+5}} = \frac{8n^2 - 5n}{\sqrt{n^4+8n} + \sqrt{n^4+5}}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 5n}{\sqrt{n^4+8n} + \sqrt{n^4+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{8 - \frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{8}{n^3}} + \sqrt{1+\frac{5}{n^4}}} = 4.$$

(ii) Wir faktorisieren und schreiben

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^n + (-2)^{n+1}}{3^{n-2} - 2^{2n-1}} = \frac{3^n - 2(-2)^n}{\frac{1}{9}3^n - \frac{1}{2}4^n} = \frac{3^n\left(1 - 2\frac{(-2)^n}{3^n}\right)}{4^n\left(\frac{1}{9}\frac{3^n}{4^n} - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1 - 2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2}} = 0 \cdot \frac{1-2\cdot 0}{\frac{1}{9}\cdot 0 - \frac{1}{2}} = 0,$$

da $\left|\dfrac{3}{4}\right|, \left|\dfrac{-2}{3}\right| < 1$ gilt.

(iii) – Lösungsweg 1: Wir stellen fest, dass $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = 1^{\pm\infty}$. Zu diesem Zweck schreiben wir den Grenzwert um, um die unbestimmte Form zu umgehen.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\ln(1-x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{1/x\cdot\ln(1-x)} \\ &\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{0}{0}} \overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{1}} \\ &= \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

– Lösungsweg 2: Wir schreiben den Grenzwert mit $x = \frac{1}{n}$ und erkennen die Limes-Darstellung der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{1/x} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}.$$

(b) Wir schreiben

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\mathrm{i}\right)^n\right|} = \left|\frac{3}{4}+\frac{1}{n}i\right| = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{3}{4} < 1.$$

Durch das Wurzelkriterium konvergiert die Reihe (absolut).

(c) Wir setzen $b_n = \frac{4}{(n+1)!}$. Wir betrachten den Quotienten

$$\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{4}{(n+1)!}}{\frac{4}{(n+2)!}}\right| = \left|\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right| = n+2$$

Für n gegen ∞ geht der Quotient $\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|$ somit gegen ∞. Damit ist der Konvergenzradius $R = \infty$.

Aufgabe 3 *(2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $\sqrt{3}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

(d) Sei $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $f^{(15)}(0)$.

(e) Gegeben sei das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy}\sin(z) + y \\ \mathrm{e}^{xy}\sin(z) + x \\ \mathrm{e}^{xy}\cos(z) - z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Divergenz von w.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Ableitung von g und erhalten

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Die Gleichung für die Tangente ist

$$\begin{aligned} y &= g(\sqrt{3}) + g'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} + \frac{1-(\sqrt{3})^2}{(1+(\sqrt{3})^2)^2}(x-\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8}(x-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(b) Polynome sind stetig. Daher ist die einzige kritische Stelle $x = 2$. Wir betrachten den Grenzwert für x gegen 2 und berechnen dadurch a. Somit ist

$$\lim_{x\to 2} f_a(x) = 4 - 4a + a$$

und f_a ist stetig genau dann, wenn

$$4 - 4a + a = f_a(2) = 3. \quad \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

gilt.

(c) *Alternative 1:* Mit der Reihendarstellung von der Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

folgt

$$T_{2,f,(0,0)}(x,y) = 1 + x^2 + y^2.$$

Alternative 2: Es kann auch über den Gradienten und die Hessematrix berechnet werden. Es ist

$$\mathrm{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^2+y^2} 2x & \mathrm{e}^{x^2+y^2} 2y \end{pmatrix}$$

und

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x^2+y^2} 4x^2 + \mathrm{e}^{x^2+y^2} 2 & \mathrm{e}^{x^2+y^2}(2y)(2x) \\ \mathrm{e}^{x^2+y^2}(2y)(2x) & \mathrm{e}^{x^2+y^2} 4y^2 + \mathrm{e}^{x^2+y^2} 2 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$f(0,0) = 1, \quad \mathrm{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom der zweiten Stufe ergibt sich durch

$$\begin{aligned} T_{2,f,(0,0)}(x,y) &= f(0,0) + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \mathrm{grad} f(0,0)^T + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Hf(0,0) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \\ &= 1 + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \\ &= 1 + x^2 + y^2. \end{aligned}$$

(d) Wir wissen, dass $\frac{f^{(15)}(0)}{15!}$ als Koeffizient des Terms vom Grad 15 der Taylor-Reihe erscheint. Daher müssen wir zunächst die Taylorreihe von $f(x)$ finden, die bei $x = 0$ zentriert ist. Zu diesem Zweck verwenden wir die Taylorreihe von e^y, um die Taylorreihe für e^{-x^2} zu finden, indem wir $y = -x^2$ einsetzen:

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots$$

Daher ist die Taylor-Reihe von $x\mathrm{e}^{-x^2}$ gegeben durch

$$x\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} = x - x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} + \ldots \tag{1}$$

Aus (1) und $n = 7$ ergibt sich, dass der Term vom Grad 15 den Koeffizienten $\frac{-1}{7!}$ hat. Daher

$$f^{(15)}(0) = -\frac{15!}{7!}.$$

(e) Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(w) &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = \mathrm{e}^{xy} \sin(z) y + \mathrm{e}^{xy} \sin(z) x - \mathrm{e}^{xy} \sin(z) - 1 \\ &= \mathrm{e}^{xy} \sin(z)(y + x - 1) - 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 *(4 + 2 + 3 + 1 Punkte)*

(a) Es sei $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$S(x,y) = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 5x-y \end{pmatrix}.$$

Es sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S), M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, ob A invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, ob B diagonalisierbar ist.

(d) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert 3. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 3.

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\right)^{-1} = \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\right)^{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S) &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\, M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S)\, M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Wir entwickeln nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det A &= \det\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2\det\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2\,[0-4+0-0-(-12)-0] + [-9+0+0-0-(-12)-(-4)] \\ &= -2\cdot 8 + 7 = -9. \end{aligned}$$

Wegen $\det A \neq 0$ ist A invertierbar.

(c) Wir berechnen das charakteristische Polynom, indem wir nach der dritten Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned} \det(B-\lambda E_3) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\,[(2-\lambda)^2-2]. \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 2+\sqrt{2}, \qquad \lambda_3 = 2-\sqrt{2}.$$

Da die Matrix B drei verschiedene Eigenwerte hat, ist B diagonalisierbar.

(d) Wir berechnen den Kern von

$$C - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Wir addieren die 1. Zeile auf die 3. und 1/2 mal die 1. Zeile auf die 2. Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert 3 gegeben durch

$$\ker(C - 3E_3) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 5 (*5 + 2 + 1 + 2 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int (9x^2 + 2x + 5)\sqrt[5]{3x^3 + x^2 + 5x + 8}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{3x - x^2}\,dx$.

(b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^1 \frac{1}{5x^2 + \sqrt{x}}dx.$$

(c) Begründen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Es sei $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}, n)$ der Raum der reellen Polynome mit Grad $\leq n$ und $p_0, p_1, ..., p_n$ die Standardbasis $p_j(x) = x^j$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T : \operatorname{Pol}(\mathbb{R}, 4) \to \operatorname{Pol}(\mathbb{R}, 2),$$
$$p \mapsto p'' = \frac{d^2}{dx^2}p.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von T bezüglich obigen Standardbasen und bestimmen Sie $\dim\ker(T)$ und $\dim\operatorname{ran}(T)$.

Lösung:

(a) (i) Mit der Substitution

$$u = 3x^3 + x^2 + 5x + 8 \quad \text{mit} \quad \frac{du}{dx} = 9x^2 + 2x + 5$$

folgt

$$\int (9x^2 + 2x + 5)\sqrt[5]{3x^3 + x^2 + 5x + 8}dx = \int \sqrt[5]{u}du = \left[\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}}\right] = \left[\frac{5}{6}\left(3x^3 + x^2 + 5x + 8\right)^{\frac{6}{5}}\right].$$

(ii) *Alternative 1: Berechnung per Substitution:*

Es gilt

$$\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}dx = 3\int_1^2 \frac{1}{3x-x^2}dx = 3\int_1^2 \frac{1}{(\frac{3}{x}-1)x^2}dx.$$

Wir führen die Substitution $u = \frac{3}{x} - 1$ mit $\frac{du}{dx} = -\frac{3}{x^2}$ durch und erhalten

$$\int \frac{1}{(\frac{3}{x}-1)x^2}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\left[-\ln|u|\right].$$

Wir machen die Rücksubstitution und erhalten

$$\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}dx = \left[-\ln\left|\frac{3}{x}-1\right|\right]_1^2 = -\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\right) = -\ln(2^{-1}) + \ln(2) = 2\ln(2).$$

Alternative 2: Berechnung per Partialbruchzerlegung:

Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Wir machen den folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{3}{3x-x^2} = -\frac{3}{x^2-3x} = -\left(\frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-3}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{3}{3x-x^2} = \frac{A_2}{x} + \frac{B_2}{3-x}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert

$$-3 = -A_1(x-3) - B_1 x \quad \text{oder} \quad 3 = A_2(3-x) + B_2 x.$$

Diese Gleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ somit auch für die speziellen Wahlen $x = 0$ und $x = 3$. Damit erhalten wir $A_1 = -1$ und $B_1 = 1$ beziehungsweise $A_2 = 1$ und $B_2 = 1$.

Mit der Wahl von A_1 und B_1 folgt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}dx &= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{x-3}dx = \left[\ln|x| - \ln|x-3|\right]_1^2 \\ &= \ln(2) - \ln(1) - \ln(1) + \ln(2) = 2\ln(2).\end{aligned}$$

Mit der Wahl von A_2 und B_2 folgt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3}{3x-x^2}dx &= \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{3-x}dx = \left[\ln|x| - \ln|3-x|\right]_1^2 \\ &= \ln(2) - \ln(1) - \ln(1) + \ln(2) = 2\ln(2).\end{aligned}$$

(b) Es ist $5x^2 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ für $x \in (0,1)$, daher ist

$$\frac{1}{5x^2+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ist konvergent, da

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

(c) *Erste Lösungsmöglichkeit:* Offenbar gilt

$$\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subsetneqq \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Also können v_1, v_2, v_3 nicht linear unabhängig sein.

Zweite Lösungsmöglichkeit: Mittels Gauß-Algorithmus oder Determinante zeigt man, dass die Matrix (v_1, v_2, v_3) nicht invertierbar ist.

(d) Es gilt

$$Tp_0 = 0, \quad Tp_1 = 0, \quad Tp_2 = 2p_0, \quad Tp_3 = 6p_1, \quad Tp_4 = 12p_2.$$

Also ist die darstellende Matrix von T gegeben durch

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12\end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\dim\ker(T) = 2, \quad \dim\operatorname{ran}(T) = 3.$$

Aufgabe 6 (*3 + 4 + 3 Punkte*)

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, \ln(2)] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cosh(2t)\\ 2t\end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (x^3 - 12x + y)\mathrm{e}^y.$$

(i) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f mit mathematischer Begründung.

(c) Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \sin(x + y) + 2x - 4y$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii) Wieso existiert in einer Umgebung des Punktes $x = 0$ eine Funktion $y = g(x)$, sodass $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$?

(iii) Bestimmen Sie $g'(0)$.

Lösung:

(a) Die Länge einer Kurve γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh(2t) \\ 2 \end{pmatrix},$$

und somit folgt für die Länge

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{4\sinh^2(2t) + 4} dt = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{4\cosh^2(2t)} dt \\ &= \int_0^{\ln(2)} 2\cosh(2t) dt = [\sinh(2t)]_0^{\ln(2)} \\ &= \left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\left(2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1-1)\right) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

(b) Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} (3x^2 - 12)\mathrm{e}^y & (x^3 - 12x + y + 1)\mathrm{e}^y \end{pmatrix}$$

und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x\mathrm{e}^y & (3x^2 - 12)\mathrm{e}^y \\ (3x^2 - 12)\mathrm{e}^y & (x^3 - 12x + y + 2)\mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

Damit ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegt, muss $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$ gelten. Dies ist erfüllt, wenn $(3x^2 - 12)\mathrm{e}^y = 0$ und $(x^3 - 12x + y + 1)\mathrm{e}^y = 0$ gilt. Aus der ersten Bedingung folgt, dass $x_{1,2} = \pm 2$ gelten muss und somit aus der zweiten Bedingung $y = 15$ für $x = 2$ und $y = -17$ für $x = -2$. Damit haben wir die stationären Punkte $P_1 = (2, 15)$ und $P_2 = (-2, -17)$. Um diese zu klassifizieren, setzen wir diese in die Hesse-Matrix ein und erhalten

$$H_f(2, 15) = \begin{pmatrix} 12\mathrm{e}^{15} & 0 \\ 0 & 1 \cdot \mathrm{e}^{15} \end{pmatrix}$$

und

$$H_f(-2, -17) = \begin{pmatrix} -12\mathrm{e}^{-17} & 0 \\ 0 & 1 \cdot \mathrm{e}^{-17} \end{pmatrix}$$

Bei $H_f(2,15)$ können die Eigenwerte direkt abgelesen werden, da sie den Diagonaleinträgen entsprechen. Diese sind positiv und somit liegt ein lokales Minimum bei P_1 vor.

Es ist $\det(H_f(-2,-17)) < 0$ bzw. es gibt einen positiven und einen negativen Eigenwert und somit liegt hier ein Sattelpunkt vor.

(c) (i) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y) + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y) - 4.$$

(ii) Wegen $f(0,0) = 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -3 \neq 0,$$

und dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass g existiert.

(iii) Wir differenzieren die Gleichung $0 = f(x, g(x))$:

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \frac{dg}{dx}(x).$$

Wir benutzen, dass $g(0) = 0$ und werten in $x = 0$ aus:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) g'(0) \iff g'(0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{3}{-3} = 1.$$