Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ingo Steinwart
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

# Klausur

für Studierende der Fachrichtungen

**el, mecha, phys, tkyb**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen **separate eigene** Blätter.
- Bitte beschriften Sie **jeden** Ihrer Zettel mit **Namen und Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Din A4-Seiten.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone, Smartwatches etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche **Lösungswege und Begründungen** anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage zur Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (*6 + 2 + 2 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 4n + (-1)^n}{(2n - \sqrt{n})^3 - 4}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos(t)}{t+2}dt$ .

**(b)** Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz oder Divergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{n}\mathrm{i}\right)^n$$

**(c)** Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+1)^n.$$

---

**Aufgabe 2** (*1 + 2 + 4 + 2 + 1 Punkte*)

**(a)** Sind die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig?

**(b)** Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Die lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit den dazugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Es sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$ und $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S)$.

**(d)** Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(e)** Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert $-1$. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $-1$.

---

**Aufgabe 3** (*2 + 2 + 2 + 4 Punkte*)

**(a)** Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \frac{1+9\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}}.$$

**(b)** Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^3 + \mathrm{i} = 0.$$

Geben Sie die Lösung sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

**(c)** Das Polynom

$$q(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$$

hat die Nullstelle $3$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms $q$.

**(d)** Es seien die Punkte $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (3, 3, 1)$ und $D = (5, 1, -1)$ gegeben. Das Viereck $ABCD$ bestehe aus den beiden Dreiecken $ABC$ und $ACD$.

Berechen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ und die Hessesche Normalenform der Ebene, in welcher das Viereck liegt.

---

**Aufgabe 4** (*5 + 2 + 3 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})\,dx,$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{2x^2}\,dx.$

**(b)** Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_1^\infty \frac{3}{2x^2 + 4\sqrt{x}}dx.$$

**(c)** Es sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},2)$ der Raum der reellen Polynome mit Grad $\leq 2$ mit der Basis $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ mit $p_1(x) = 1 - 2x^2$, $p_2(x) = -2 + x$ und $p_3(x) = 2x$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathrm{Pol}(\mathbb{R},2) &\to \mathrm{Pol}(\mathbb{R},2), \\ p &\mapsto p' = \frac{d}{dx}p. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $T$ bezüglich obigen Standardbasen und bestimmen Sie $\dim\ker(T)$ und $\dim\mathrm{ran}(T)$.

---

**Aufgabe 5** (*2 + 3 + 3 + 2 Punkte*)

**(a)** Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ 2\sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

**(b)** Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = xy - x + y^3.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $g$ mit mathematischer Begründung.

**(c)** Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 3$.

**(d)** Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad g(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \sin(y_1) \\ y_2 + \cos(y_1) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jh(x_1,x_2)$ der Verkettung $h = g \circ f$.

---

**Aufgabe 6** (*4 + 2 + 2 + 2 Punkte*)

**(a)** Gegeben sei die Funktion $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $g$ definiert?

ii) Untersuchen Sie $g$ auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema.

**(b)** Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + a, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass $f_a$ stetig ist.

**(c)** Berechnen Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos(2x) + \sin(2y)$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

**(d)** Gegeben sei das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \sin(z) \\ y \sin(z) \\ \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Rotation $\nabla \times w$.