Prof. Dr. Ingo Steinwart
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, mecha, phys, tkyb

Bitte unbedingt beachten:

- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen **separate eigene** Blätter.
- Bitte beschriften Sie **jeden** Ihrer Zettel mit **Namen und Matrikelnummer**.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Din A4-Seiten.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone, Smartwatches etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche **Lösungswege und Begründungen** anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage zur Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(6 + 2 + 2 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 - 4n + (-1)^n}{(2n - \sqrt{n})^3 - 4}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)\right)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos(t)}{t+2}dt$.

(b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz oder Divergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{n}\mathrm{i}\right)^n$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+1)^n.$$

Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - 4n + (-1)^n}{(2n - \sqrt{n})^3 - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3}}{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 - \frac{4}{n^3}} \qquad = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

ii) Wir stellen fest, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\big) = \infty \cdot 0$. Zu diesem Zweck wandeln wir das Produkt in einen Bruch um, um die L'Hospital-Regel anwenden zu können.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\big) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(n)}{n^{-1}}\right) \overset{\frac{0}{0},\text{ L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(n)\right]'}{[n^{-1}]'}\right) \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2+1}}{-n^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty},\text{ L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n} \\ &= 1.\end{aligned}$$

iii) *Alternative 1:* Die Funktion $t \to \frac{\cos(t)}{t+2}$ ist stetig in der Nähe von 0. Damit besitzt der Integrand eine Stammfunktion F. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\cos(t)}{t+2}dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(F(x) - F(0)) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = \frac{\cos(0)}{0+2} = \frac{1}{2}.$$

Alternative 2: Wir schreiben

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\cos(t)}{t+2} dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{I(x)} .$$

Die Funktion f ist stetig und es gilt $I'(x) = f(x)$. Dann folgt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \frac{\cos(t)}{t+2} dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos(x)}{x+2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(b) Wir schreiben

$$\sqrt[n]{\left|(\frac{4}{3} - \frac{1}{n}\mathrm{i})^n\right|} = \left|\frac{4}{3} - \frac{1}{n}\mathrm{i}\right| \to \frac{4}{3} > 1.$$

Wegen dem Wurzelkriterium divergiert die Reihe.

(c) Wir berechnen den Grenzwert von

$$\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty.$$

Damit ist der Konvergenzradius $R = 0$ und die Reihe konvergiert nur für $x = -1$.

Aufgabe 2 *(1 + 2 + 4 + 2 + 1 Punkte)*

(a) Sind die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig?

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit den dazugehörigen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Es sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S)$ und $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S)$.

(d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert -1. Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert -1.

Lösung:

(a) Mit Gaußalgorithmus oder Determinante zeigt man leicht, dass die Matrix (w_1, w_2, w_3) invertierbar ist. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

(b) Durch die übliche Gaußelimination erhält man nach etwas Rechnen

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Offenbar gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}))^{-1} = (M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}))^{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(S) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(S) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

(d) Wir berechnen das charakteristische Polynom, indem wir nach der ersten Spalte entwickeln:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda) + 2\right] = (2-\lambda)(12 - 7\lambda + \lambda^2). \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = 4.$$

(e) Wir berechnen den Kern von

$$C - (-1)E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir addieren die -1 mal 1. Zeile auf die 3. und -1 mal die 1. Zeile auf die 2. Zeile:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist der Eigenraum zum Eigenwert -1 gegeben durch

$$\ker(C - (-1)E_3) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3 *(2 + 2 + 2 + 4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie den Real- und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \frac{1+9\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}}.$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von

$$z^3 + \mathrm{i} = 0.$$

Geben Sie die Lösung sowohl in Polar-Koordinaten, als auch in kartesischen Koordinaten an.

(c) Das Polynom

$$q(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 12$$

hat die Nullstelle 3. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Polynoms q.

(d) Es seien die Punkte $A = (2,0,1)$, $B = (1,1,2)$, $C = (3,3,1)$ und $D = (5,1,-1)$ gegeben. Das Viereck $ABCD$ bestehe aus den beiden Dreiecken ABC und ACD.

Berechen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ und die Hessesche Normalenform der Ebene, in welcher das Viereck liegt.

Lösung:

(a) Wir erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners:

$$\begin{aligned} z =& \frac{1+9\mathrm{i}}{5-2\mathrm{i}} = \frac{(1+9\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}{(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})} \\ =& \frac{-13+47\mathrm{i}}{29}. \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{13}{29} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{47}{29}.$$

(b) Wir schreiben dazu $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} & z^3 + \mathrm{i} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & r^3 \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 \quad \text{und} \quad 3\mathrm{i}\theta = \mathrm{i}\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathrm{i}k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & r = 1 \quad \text{und} \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}. \end{aligned}$$

Die Lösungen von $z^3 + i = 0$ sind somit

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i} \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}, \\ z_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}. \end{aligned}$$

(c) Da $z_1 = 3$ eine Nullstelle von q machen wir folgende Polynomdivision

$$\begin{array}{lllll} (z^3 & -3z^2 & +4z & -12) & : (z-3) = z^2+4. \\ z^3 & -3z^2 & & & \\ \hline & 0 & +4z & -12 & \\ & & 4z & -12 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Damit ist

$$q(z) = (z-3)\left(z^2+4\right) = (z-3)(z-2\mathrm{i})(z+2\mathrm{i}).$$

Damit sind die anderen 2 Nullstellen $z_2 = 2\mathrm{i}$ und $z_3 = -2\mathrm{i}$.

(d) Wir berechnen den Flächeninhalt des Vierecks über den Flächeninhalt der zwei Dreiecke ABC und ACD. Wir berechnen die Verbindungsvektoren

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Das Kreuzprodukt ist dann

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist

$$|\Delta| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}(\sqrt{26} + \sqrt{104}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{13}.$$

Die Ebene $\mathcal{E}$, in der das Viereck $ABCD$ liegt, hat die Hessesche Normalform

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^3 | \langle x, n\rangle = d\}$$

mit

$$n = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad d = \langle A, n\rangle = \frac{-10}{\sqrt{2}\sqrt{13}}.$$

Aufgabe 4 *(5 + 2 + 3 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})\,dx$,

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{2x^2}\,dx$.

(b) Untersuchen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{2x^2+4\sqrt{x}}dx.$$

(c) Es sei $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},2)$ der Raum der reellen Polynome mit Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B}=(p_1,p_2,p_3)$ mit $p_1(x)=1-2x^2$, $p_2(x)=-2+x$ und $p_3(x)=2x$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T:\mathrm{Pol}(\mathbb{R},2)\to\mathrm{Pol}(\mathbb{R},2),$$
$$p\mapsto p'=\frac{d}{dx}p.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von T bezüglich obigen Standardbasen und bestimmen Sie $\dim\ker(T)$ und $\dim\operatorname{ran}(T)$.

Lösung:

(a) (i) Mit partieller Integration finden wir

$$\int (2x+1)\mathrm{e}^{2x}dx=\left[(2x+1)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]-\int \mathrm{e}^{2x}dx=\left[x\mathrm{e}^{2x}\right]$$

(ii) Mit Substitution $u=\sqrt{x}$ und $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})dx=\int 2\sin(u)du=[-2\cos(u)]=[-2\cos(\sqrt{x})].$$

(iii) Beachte, dass für $f(x)=\sin(x)\mathrm{e}^{2x^2}$ die Symmetrie $f(-x)=-f(x)$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx&=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_0^{\pi} f(x)dx\\&=\int_0^{\pi}(-f(x)+f(x))dx=0.\end{aligned}$$

(b) Es ist $2x^2+4\sqrt{x}\geq 2x^2$ für $x\in(1,\infty)$, daher ist

$$\frac{3}{2x^2+4\sqrt{x}}\leq\frac{3}{2x^2}.$$

Das Integral $\int_1^{\infty}\frac{3}{2x^2}dx$ ist konvergent, da

$$\int_1^{\infty}\frac{3}{2x^2}dx=\left[-\frac{3}{2x}\right]_1^{\infty}=\frac{3}{2}.$$

(c) Es gilt

$$Tp_1 = -4x = (-2)p_3, \quad Tp_2 = 1 = (-\frac{1}{2})p_2 + \frac{1}{4}p_3, \quad Tp_3 = 2 = (-1)p_2 + \frac{1}{2}p_3.$$

Also ist die darstellende Matrix von T gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\dim \ker(T) = 1, \quad \dim \operatorname{ran}(T) = 2.$$

Aufgabe 5 *(2 + 3 + 3 + 2 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ 2\sin^2(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) = xy - x + y^3.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von g mit mathematischer Begründung.

(c) Bestimmen Sie die Minima und Maxima der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x, y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 3$.

(d) Es seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \quad g(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \sin(y_1) \\ y_2 + \cos(y_1) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $Jh(x_1, x_2)$ der Verkettung $h = g \circ f$.

Lösung:

(a) Die Länge einer Kurve γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ 4\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix},$$

und somit folgt für die Länge

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\cos^2(t)\sin^2(t) + 16\sin^2(t)\cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{20}\sin(t)\cos(t) dt$$
$$= [\sqrt{5}\sin^2(t)]_0^{\pi/2} = \sqrt{5}.$$

(b) Es ist

$$\text{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} y - 1 & x + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ein kritischer Wert vorliegt, muss $\text{grad}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ vorliegen. Daraus folgt direkt $y = 1$ und $x = -3$ als einziger kritischer Punkt $P_1 = (-3, 1)$. Die Hesse-Matrix dient zur Klassifizierung. Diese lautet

$$H_f(-3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix} |_{(-3,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det H_f(-3,1) = -1 < 0$. Damit liegt bei P_1 ein Sattelpunkt vor.

Alternative Begründung für Sattelpunkt: Dies geht auch über die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom lautet $\lambda(\lambda - 6) - 1 = \lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$. Damit folgt $\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2}$. Da $\sqrt{40} > 6$ ist somit $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ und somit liegt bei P_1 ein Sattelpunkt vor.

(c) Die Nebenbedingung schreiben wir als $g(x,y) = x^2 - y - 3 = 0$. Es ist

$$(\text{grad}g)^T = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Wir benutzen die Lagrange Methode und führen die Funktion F als Lagrange-Funktion ein

$$F(x,y,\lambda) = h(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - y - 3).$$

Wir berechnen

$$(\text{grad}F)^T = \begin{pmatrix} 2x - 2\lambda x \\ 2y + \lambda \\ x^2 - y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $\lambda = 1$.

- Aus $x = 0$ folgt mit der dritten Gleichung $y = -3$.
- Aus $\lambda = 1$ folgt aus der zweiten Gleichung $y = -\frac{1}{2}$ und somit aus der dritten Gleichung $x^2 = \frac{5}{2}$ bzw. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Wir erhalten somit die Punkte $P_1 = (0, -3)$ und $P_{2,3} = \left(\pm\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Diese setzen wir in f ein und bekommmen $f(0,-3) = 9$ und $f(\pm\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{11}{4}$. Somit liegt bei P_1 ein Maximum vor und bei $P_{2,3}$ Minima.

(d) Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen von f und g:

$$Jf(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Jg(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \cos(y_1) & 0 \\ -\sin(y_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel und $(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ folgt dann

$$\begin{aligned} Jh(x_1,x_2) &= Jg(y_1,y_2) Jf(x_1,x_2) \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2) & x_1 \cos(x_1 x_2) \\ -x_2 \sin(x_1 x_2) & -x_1 \sin(x_1 x_2) - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*4 + 2 + 2 + 2 Punkte*)

(a) Gegeben sei die Funktion $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist g definiert?

ii) Untersuchen Sie g auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und setze

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_a(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + a, & x \neq 2, \\ 3, & x = 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass f_a stetig ist.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom der zweiten Stufe der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos(2x) + \sin(2y)$$

im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(d) Gegeben sei das Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\sin(z) \\ y\sin(z) \\ \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Rotation $\nabla \times w$.

Lösung:

(a) i) Die Funktion g ist für $x \in [-4, 4]$ definiert, da so die Wurzel positiv ist.

ii) Wir berechnen die Nullstellen von g mit dem Satz vom Nullprodukt. Daher ist $x = 0$ eine Nullstelle oder

$$16 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4.$$

Um die Extremstellen zu bestimmen, berechnen wir die erste Ableitung von g

$$g'(x) = \sqrt{16 - x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{16 - x^2}}(-2x) = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Der Definitionsbereich von g' ist $(-4, 4)$. Die Nullstellen von g' sind

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{8}.$$

Diese liegen in dem Intervall $(-4,4)$. Um die Wendepunkte zu bestimmen, berechnen wir die zweite Ableitung von g. Es ist

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-4x(\sqrt{16-x^2}) - (16-2x^2) * \left(\frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}\right)(-2x)}{16-x^2} \\ &= \frac{-4x(16-x^2) - (16-2x^2) * \left(\frac{1}{2}\right)(-2x)}{(16-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-64x + 4x^3 + (16x - 2x^3)}{(16-x^2)^{3/2}} = \frac{-2x(24-x^2)}{(16-x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Für $x \in (-4.4)$ ist g'' definiert. Die Nullstellen von g'' berechnen sich durch den Satz vom Nullprodukt zu

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad (24 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{6})$$

Es ist allerdings $\pm 2\sqrt{6} \notin (-4,4)$, sodass $x = 0$ die einzige Nullstelle von g'' ist.
Für $x \in (-4,0)$ berechnen wir

$$g''(x) \geq 0$$

und für $x \in (0,4)$ finden wir

$$g''(x) \leq 0.$$

Damit wissen wir, dass $x = 0$ ein Wendepunkt ist.
Mit dem Test der zweiten Ableitung ist außerdem bekannt, dass ein globales Minimum in dem Punkt $(-\sqrt{8}, -8)$ und ein globales Maximum in $(\sqrt{8}, 8)$ vorliegen.

(b) Polynome sind stetig. Daher ist die einzige kritische Stelle $x = 2$. Wir betrachten den Grenzwert für x gegen 2 und berechnen dadurch a. Somit ist

$$\lim_{x \to 2} f_a(x) = 4a + 4 + a = 4 + 5a$$

und f_a ist stetig genau dann, wenn

$$4 + 5a = f_a(2) = 3. \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

gilt.

(c) *Alternative 1:* Mit den Taylorentwicklungen $\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + O(x^4)$ und $\sin(2y) = 2y + O(y^3)$ folgt

$$T_{2,f,(0,0)}(x,y) = 1 - 2x^2 + 2y.$$

Alternative 2: Es kann auch über den Gradienten und die Hessematrix berechnet werden. Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y)^T = \begin{pmatrix} -2\sin(2x) & 2\cos(2y) \end{pmatrix}$$

und

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -4\cos(2x) & 0 \\ 0 & -4\sin(2y) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$f(0,0) = 1, \quad \operatorname{grad} f(0,0)^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Taylorpolynom der zweiten Stufe ergibt sich durch

$$\begin{aligned} T_{2,f,(0,0)}(x,y) &= f(0,0) + \operatorname{grad} f(0,0)^T \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Hf(0,0) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T \\ &= 1 + 2y - 2x^2. \end{aligned}$$

(d) Es ist

$$\nabla \times w = \begin{pmatrix} \partial_y(\cos(z)) - \partial_z(y\sin(z)) \\ \partial_z(x\sin(z)) - \partial_x(\cos(z)) \\ \partial_x(y\sin(z)) - \partial_y(x\sin(z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\cos(z) \\ x\cos(z) \\ 0 \end{pmatrix}.$$