

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik III

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript  
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle sechs Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

**Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!**

**Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!**

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Anfang Oktober im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 19. Oktober 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

**Aufgabe 1**

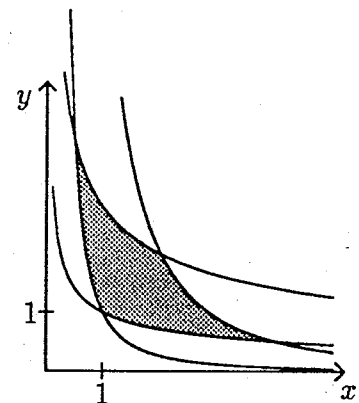
Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p e^q \\ p e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 y \leq 8, 1 \leq x y^2 \leq 8\}.$$

- Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation  $\Phi$ .
- Beschreiben Sie die Fläche  $F$  in  $pq$ -Koordinaten und skizzieren Sie  $F$  in der  $pq$ -Ebene.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von  $F$ .



## Aufgabe 2

Für  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  sei ein Vektorfeld der folgenden Form gegeben:

$$v(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad f(1) = 1$$

- a) Bestimmen Sie die skalare Funktion  $f$  so, daß das Vektorfeld  $v$  divergenzfrei ist.  
b) Bestimmen Sie für diese Funktion  $f$  den Fluß von  $v$  von innen nach außen für folgende Kugeln:

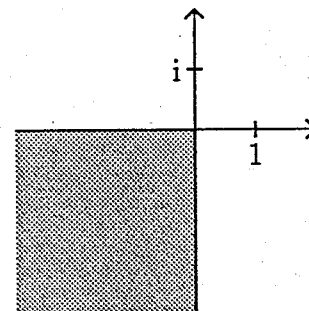
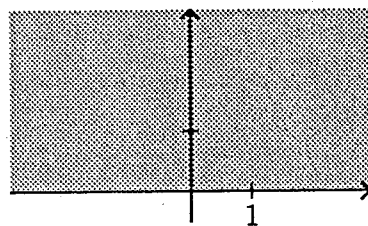
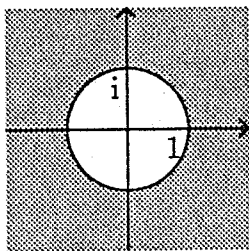
$$- K_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$- K_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Hinweis: Beachten Sie, daß das Vektorfeld  $v$  im Ursprung nicht definiert ist.

## Aufgabe 3

Gegeben seien die drei Gebiete in der komplexen Zahlenebene:



$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0\}$$

Bestimmen Sie konforme Abbildungen  $f_1, f_2$ , für welche gilt:

a)  $f_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  mit  $0 \rightarrow -i$  und  $1 \rightarrow \infty$ .

b)  $f_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$  mit  $i \rightarrow -1 - i$ .

#### Aufgabe 4

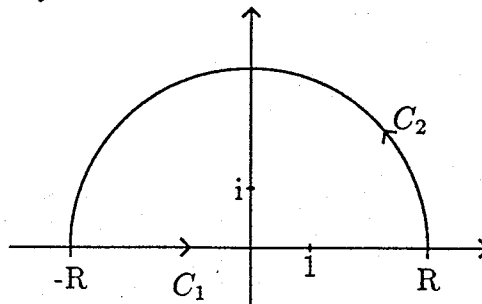
Gegeben sei die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$f(x) := \exp(x) \quad \text{für } 0 < x \leq 2\pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

- Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von  $f$ .
- Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von  $f$ .

#### Aufgabe 5

Es seien  $C_1$  und  $C_2$  die nebenstehend skizzierten Kurven.



- Welche Singularitäten besitzt die Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)(z - i)}$$

in der oberen Halbebene? Bestimmen Sie die Residuen von  $f$  an diesen Stellen.

- Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_{C_1 + C_2} f(z) dz$  für  $R \geq 1000$ .
- Berechnen Sie mit Hilfe von Teil b) das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x + \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Hinweis: Benutzen Sie ( ohne Beweis):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = 0$$

#### Aufgabe 6

- Gegeben sei das Dreieck  $\Delta$  mit den Eckpunkten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Geben Sie eine Parametrisierung der Dreiecksfläche in der Form  $z = f(x, y)$  an und bestimmen Sie einen Normalenvektor.
- Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds  $v = (\sin(x^2), xy, zy)^T$ .
- Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$W := \int_{\partial\Delta} v$$

des Vektorfelds  $v$  entlang der Randkurve  $\partial\Delta$  des Dreiecks. Die Orientierung der Randkurve sei dabei so gewählt, daß die Eckpunkte in der angegebenen Reihenfolge durchlaufen werden.