Aufgabe 1 (Vollständige Induktion) (4 Punkte)
Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (8 Punkte)
Sei eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2\,y + z \\ x + y \\ -3\,x - y + 3\,z \end{pmatrix}.$$

Sei außerdem der Vektor $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A der linearen Abbildung f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
b) Zeigen Sie, dass die Matrix A invertierbar ist und bestimmen Sie ihre Inverse.
c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.
d) Geben Sie den Rang von f und die Dimension des Kerns von f an. Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3 (Linearität) (4 Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

$$a\colon (x,y) \mapsto (-y,x), \qquad b\colon (x,y) \mapsto (x^2,1).$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4 (Eigenwerte) (5 Punkte)
Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.
b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenraum eine Basis.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (Basiswechsel) (4 Punkte)

Sei durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ definiert. Seien weiter die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Begründen Sie kurz, warum die Vektoren b_1, b_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

b) Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis b_1, b_2.

Aufgabe 6 (Folgen) (6 Punkte)

Entscheiden Sie: Welche der nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen sind beschränkt, welche sind konvergent?

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{n^4 + \sin(n)^3}{n^4 + \cos(n)^3}, \qquad \text{b)}\quad b_n = (-n)^n, \qquad \text{c)}\quad c_n = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right).$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 7 (Reihen) (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, bzw. bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen bei den Teilaufgaben c) und d).

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(n)}{2}\right)^n, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n.$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + y^3 - 9\,y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x,y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Aufgabe 9 (Taylorpolynom) (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung $T_4(x)$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\sin(x))^2$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Benutzen Sie die Lagrangesche Form des Restglieds, um zu zeigen, dass für $|x| < \frac{1}{10}$ der Wert von $T_4(x)$ um weniger als 0,00001 von $f(x)$ abweicht.