Mathematik für inf swt msv
Lösungsvorschläge zur Modulklausur im Wintersemester 2023 / 24

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion) (4 Punkte)
Beweisen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) *Induktionsanfang* $n = 1$: Für $n = 1$ besteht die linke Seite nur aus dem Summanden 1, die rechte Seite ist gleich $1^2 = 1$.
b) *Induktionsschritt* $n \to n+1$: Angenommen, die Formel gelte für eine natürliche Zahl n. Dann erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem) (8 Punkte)
Sei eine lineare Abbildung $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2\,y + z \\ x + y \\ -3\,x - y + 3\,z \end{pmatrix}.$$

Sei außerdem der Vektor $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix A der linearen Abbildung f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.
b) Zeigen Sie, dass die Matrix A invertierbar ist und bestimmen Sie ihre Inverse.
c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$.
d) Geben Sie den Rang von f und die Dimension des Kerns von f an. Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Man liest direkt ab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir wenden elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|E)$ an:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Dies zeigt, dass A invertierbar ist und dass die Inverse von A durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

c) Da A invertierbar ist, ist die Lösung des Gleichungssytems eindeutig und gegeben durch

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

d) Da die Matrix invertierbar ist, ist der Rang gleich 3 und ihr Kern ist null-dimensional.

Aufgabe 3 (Linearität) (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

$$a\colon (x,y) \mapsto (-y,x), \qquad b\colon (x,y) \mapsto (x^2,1).$$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Abbildung a ist linear, denn es gilt

$$a(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda y, \lambda x) = \lambda\, a(x,y)$$

und

$$a(x+u, y+v) = (-y-v, x+u) = a(x,y) + a(u,v).$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x,y,u,v \in \mathbb{R}$.

b) Die Abbildung b ist nicht linear, denn es gilt z.B. nicht, dass die Null auf die Null abgebildet wird, was bei jeder linearen Abbildung der Fall ist.

Aufgabe 4 (Eigenwerte) (5 Punkte)
Sei die folgende reelle Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.
b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenraum eine Basis.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -2 \\ -1 & t & -2 \\ -2 & 0 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)t(t-4) - 4t = t^3 - 5t^2$$

wobei wir nach der ersten Zeile entwickelt haben. Offensichtlich ist 0 eine Nullstelle, die andere ist 5.

b) Wir beginnen damit, eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 0 (des Kerns) zu bestimmen. Eine Basis von $\ker(A)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 5 zu bestimmen, berechnen wir:

$$\ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\ker \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

womit wir einen Basisvektor gefunden haben.

Aufgabe 5 (Basiswechsel) (4 Punkte)
Sei durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = Ax$ definiert. Seien weiter die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Begründen Sie kurz, warum die Vektoren b_1, b_2 eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.
b) Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis b_1, b_2.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Offensichtlich sind die beiden Vektoren linear unabhängig (denn keiner der beiden Vektoren ist ein Vielfaches des anderen), daraus folgt bereits, dass sie eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.
b) Wir bilden die Matrix
$$T = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ihre Inverse berechnet sich zu
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$
(sie ist hier zufällig gleich T). Die gewünschte darstellende Matrix ist somit
$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 27 & -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (Folgen) (6 Punkte)
Entscheiden Sie: Welche der nachstehenden reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen sind beschränkt, welche sind konvergent?

a) $a_n = \dfrac{n^4 + \sin(n)^3}{n^4 + \cos(n)^3}$, b) $b_n = (-n)^n$, c) $c_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{8}\right) + i \sin\left(\dfrac{n\pi}{8}\right)$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Die Folge konvergiert gegen 1, denn:
$$\frac{n^4 + \sin(n)^3}{n^4 + \cos(n)^3} = \frac{1 + \sin(n)^3/n^4}{1 + \cos(n)^3/n^4} \longrightarrow 1.$$
Da die Folge konvergiert, ist sie auch beschränkt.
b) Die Folge b_n ist unbeschränkt, denn $|b_n| = n^n \geq n$ für $n \in \mathbb{N}$, und somit divergent.
c) Die Folge c_n ist beschränkt, denn $|c_n| = 1$. Sie ist nicht konvergent, da sie keine Cauchyfolge ist, denn (zum Beispiel) die Folgenglieder $c_{16n} = 1$ und $c_{16n+8} = -1$ haben immer konstanten Abstand voneinander.

Aufgabe 7 (Reihen) (8 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren, bzw. bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen bei den Teilaufgaben c) und d).

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(n)}{2}\right)^n$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7

a) Die Reihe divergiert, da die Summanden keine Nullfolge bilden:

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n} \geq 1.$$

b) Wir benutzen das Wurzelkriterium.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left| \frac{\cos(n)}{2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Das zeigt, dass die Reihe konvergiert. (*Alternativ*: Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ ist eine konvergente Majorante.)

c) Wir berechnen:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1} \longrightarrow 1.$$

Der Konvergenzradius ist 1.

d) Wir berechnen:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{3^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 8 (Lokale Extrema) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^3 - 9\,y.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x, y)$ und die Hessematrix $\operatorname{Hess} f(x, y)$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Untersuchen Sie die Funktion auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Man berechnet:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 3\,y^2 - 9 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6\,y \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $\operatorname{grad} f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ und $y^2 = 3$. Die beiden einzigen kritischen Punkte sind somit $(0, \sqrt{3})$ und $(0, -\sqrt{3})$. Im ersten Fall ist die Hessematrix positiv definit, es handelt sich somit um ein (isoliertes) lokales Minimum; im zweiten Fall ist die Hessematrix indefinit, es handelt sich um einen Sattelpunkt.

Aufgabe 9 (Taylorpolynom) (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung $T_4(x)$ der Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (\sin(x))^2$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Benutzen Sie die Lagrangesche Form des Restglieds, um zu zeigen, dass für $|x| < \frac{1}{10}$ der Wert von $T_4(x)$ um weniger als 0,00001 von $f(x)$ abweicht.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Das Taylorpolynom vierter Ordnung mit den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(x)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\,x^3 + \frac{f''''(x)}{4!}\,x^4.$$

Wir berechnen zunächst die erste bis vierte Ableitung von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,\sin(x)\cos(x)\,, \\ f''(x) &= 2\,\cos(x)^2 - 2\,\sin(x)^2\,, \\ f'''(x) &= -8\,\sin(x)\cos(x)\,, \\ f''''(x) &= -8\,\cos(x)^2 + 8\,\sin(x)^2\,. \end{aligned}$$

und damit gilt $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$, $f''''(0) = -8$. Daraus ergibt sich das Taylorpolynom

$$T_4(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$

(*Alternativ:* Unter Benutzung eines Additionstheorems erhält man $f'(x) = \sin(2x)$ und damit $f''(x) = 2\cos(2x)$, $f'''(x) = -4\sin(2x)$, $f''''(x) = -8\cos(2x)$.)

b) Das Lagrange-Restglied ist gegeben durch

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5,$$

wobei ξ zwischen $x_0 = 0$ und x liegt. Wir bestimmen die fünfte Ableitung von f:

$$f^{(5)}(x) = 32\,\sin(x)\cos(x)\,.$$

Unter Verwendung von $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ folgt

$$|R_4(x)| \leq \tfrac{32}{120}|x^5|,$$

somit ist der Fehler auf dem Intervall $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ kleiner als $10^{-5} = 0{,}00001$.