Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

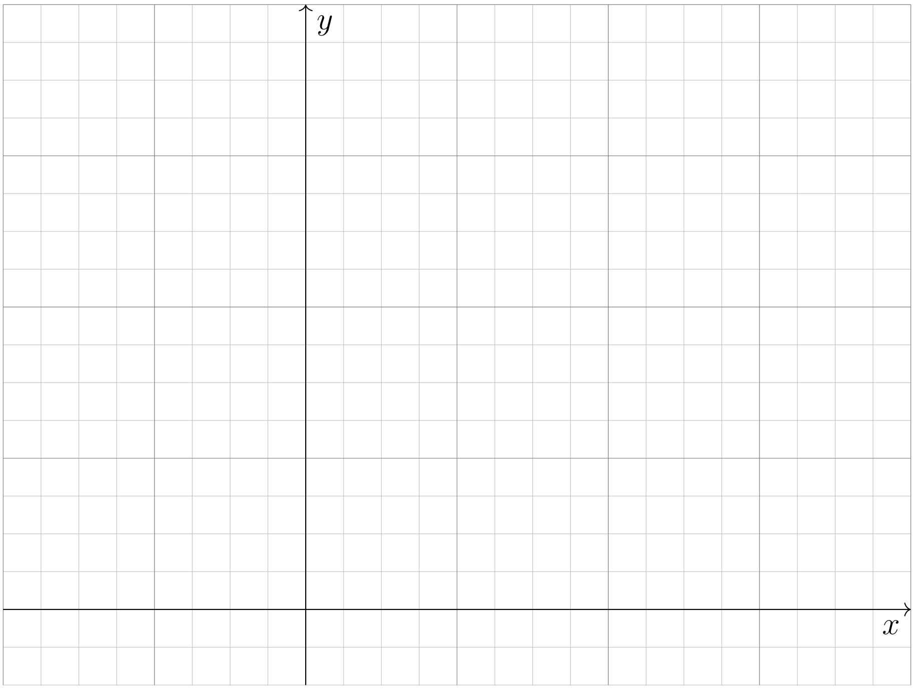
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration und Integralsätze in der Ebene (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \sin(y^2)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$$

1A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



2

1B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in x-Richtung:

$\boxed{} \leq y \leq \boxed{}$ und $\boxed{} \leq x \leq \boxed{}$ 2

1C. Bestimmen Sie das Integral.

4

1D. Es seien das ebene Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x, y)$ und die Kurve $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ gegeben. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot d\Gamma$.

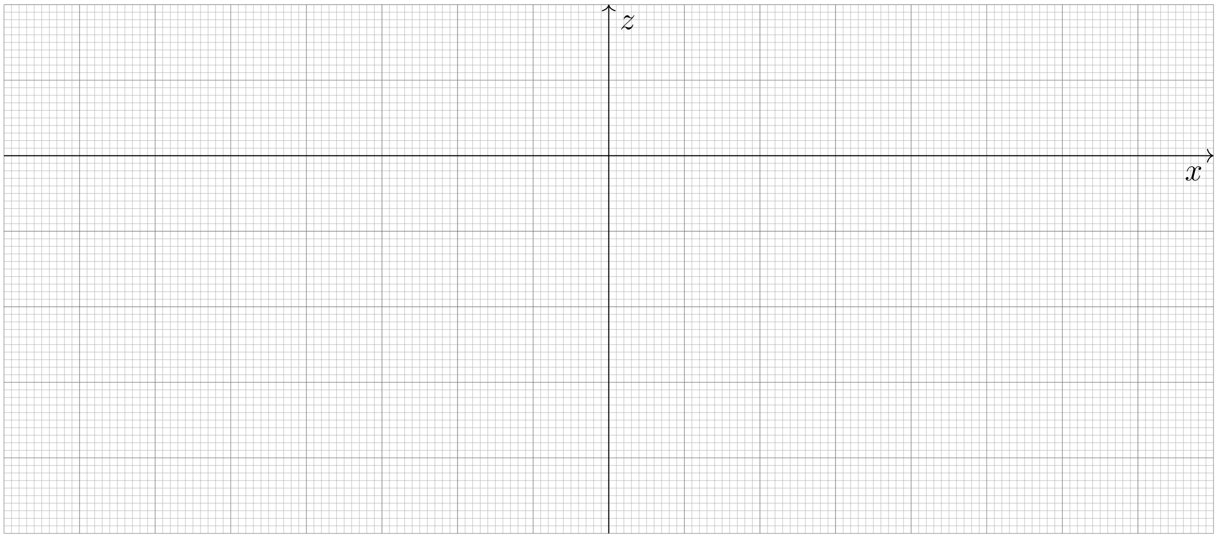
$\overline{2}$

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 4 \le z \le 1 - \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{y^2}{4} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

2A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der xz–Ebene (also mit der Ebene $y = 0$):



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \boxed{}, \\ \boxed{} \le z \le \boxed{} \end{cases}$$

3

2B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) =$

2

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = x^2 + y^2 - 4$ und dem Deckel D mit $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ \rho^2 - 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_B}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_B}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

1

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B:

$$\int_{s \in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

2

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s \in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

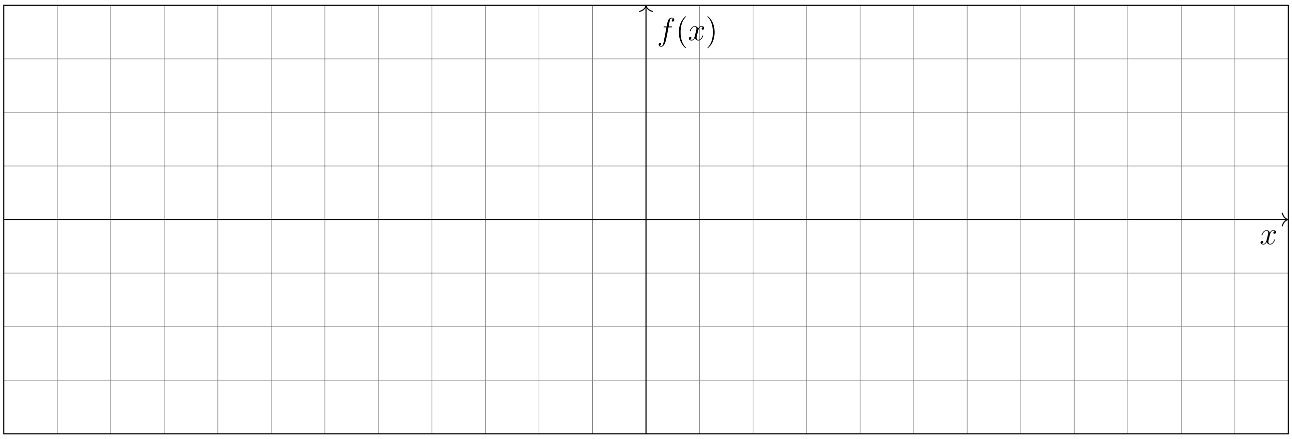
1

Aufgabe 3. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Wir definieren eine ungerade 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$f(x) = -\cos(x)$ für $x \in [0, \pi)$.

3A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.



__ 2

3B. Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier–Reihe von f.

(Hinweis: Die Formel $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$ könnte nützlich sein.)

__ 5

3C. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$a = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{8l(-1)^{l+1}}{\pi(4l^2-1)}$$

Auswertung in $x =$ $\boxed{}$ ergibt $a =$ $\boxed{}$. 2

3D. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in dem Punkt $x = 3\pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(3\pi) =$ $\boxed{}$. 1

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* (*10 Punkte*)

4A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) = 0.$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung in Polynomen 1. Ordnung über $\mathbb{C}$:

$p(x) =$ $\boxed{}$. 2

4B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$y(t) =$ $\boxed{}$. 2

4C. Finden Sie für jede der folgenden linearen Differentialgleichungen eine partikuläre Lösung.

$$\begin{aligned} y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) &= -32 \qquad (1)\\ y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) &= 9e^{-it} \qquad (2)\\ y^{(5)}(t) + 8y'''(t) + 16y'(t) &= -32 + 9e^{-it} \qquad (3) \end{aligned}$$

6

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssystem (10 Punkte)*

Wir betrachten das folgende DG-System

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) + \mathrm{e}^{2t} \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + 3y_2(t) \end{cases}.$$

5A. In Matrixschreibweise gilt $y'(t) = Ay(t) + b(t)$ mit

$A = \boxed{}$ und $b(t) = \boxed{}$.

2

5B. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{}$, Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{}$,

2

5C. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen DG-Systems.

Eine Fundamentalmatrix des homogenen DG-Systems ist

$W(t) = \boxed{}$ und die homogene Lösung ist $y_h(t) = \boxed{}$.

2

5D. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen DG-Systems.

Für die Fundamentalmatrix $W(t)$ gilt:

$W(t)^{-1} = \boxed{}$.

Damit $c(t) = \boxed{}$.

Die partikuläre Lösung ergibt sich als $y_p(t) = \boxed{}$.

3

5E. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

$y_1(t) = \boxed{}$ und $y_2(t) = \boxed{}$.

2

Aufgabe 6. *Wahrscheinlichkeitstheorie (10 Punkte)*

6A. In einem Schublade liegen 8 schwarze, 6 blaue und 4 rote Socken durcheinander. Wenn Sie zweimal blind in die Schublade greifen, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie zwei gleichfarbige Socken?

$\overline{}$ 4

6B. Man würfelt $n = 18000$ Mal mit einem fairen Würfel. Sei S die Häufigkeit der Augenzahl 6. Wie groß ist die Erwartung und Varianz von S? Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für $S \in [2500, 3500]$!

$\overline{}$ 4

6C. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} ax - 1/2 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Konstante a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt X einen Wert zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ an?

$\overline{}$
2