Aufgabe 1 *(5+2+3=10 Punkte)*

(i) Sei $D := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq u \leq \sqrt{3}\,,\, \ln(u) \leq v \leq \ln(3u)\right\}$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho\colon D \to \mathbb{R}^3\,,\; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^v \\ u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u^2 + \mathrm{e}^v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt $O(F)$.

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 - y \\ -xy \\ -zx + y^2 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{div} f$ und $\mathrm{rot} f$.

(iii) Sei G die Fläche

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 2\right\}\,,$$

deren Rand durch

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\; t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist mit Normalenvektor

$$\mathrm{n}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie für f aus (ii) das Integral

$$\int\limits_G \Big\langle \mathrm{rot} f(x,y,z), \mathrm{n}(x,y,z) \Big\rangle \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

über ein entsprechendes Wegintegral.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{n}(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung von G zeigt.

(i) Wir berechnen zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^v \\ 0 \\ \mathrm{e}^v \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^v\\0\\\mathrm{e}^v\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^v\\-\sqrt{2}u\mathrm{e}^v\\\mathrm{e}^v\end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\left\|\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v)\right\|=\sqrt{\mathrm{e}^{2v}+2u^2\mathrm{e}^{2v}+\mathrm{e}^{2v}}$$
$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^v\sqrt{1+u^2}$$

und somit

$$O(F)=\int\limits_F 1\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_D\left\|\frac{\partial\rho}{u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{v}(u,v)\right\|\mathrm{d}(u,v)$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\int\limits_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\mathrm{e}^v\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+u^2}\int\limits_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+u^2}\left[\mathrm{e}^v\right]_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}2u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Substitution: $\xi(u):=\left(1+u^2\right),\xi'(u)=2u$

$$=\sqrt{2}\int\limits_2^4\sqrt{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$=\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}(\xi)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4=\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{3}$$

(ii) Es gelten

$$\operatorname{div}f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(y^2-y\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(-xy)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-zx+y^2\right))=-x-x=-2x$$

und

$$\operatorname{rot}f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}\left(-xz+y^2\right)-\frac{\partial f}{\partial z}(-xy)\\\frac{\partial f}{\partial z}\left(y^2-y\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(-xz+y^2\right)\\\frac{\partial f}{\partial x}(-xy)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(y^2-y\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\z\\1-3y\end{pmatrix}$$

(iii) Es gilt:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten daher mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int\limits_G \langle \mathrm{rot} f(x,y,z), \mathrm{n}(x,y,z)\rangle \, \mathrm{d}(x,y,z) &= \oint\limits_C \langle f(x,y,z), \, \mathrm{d}(x,y,z)\rangle \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \big\langle f(C(t)), C'(t)\big\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} (\sin(t))^2 - \sin(t) \\ -\cos(t)\sin(t) \\ -2\cos(t) + (\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} -(\sin(t))^3 + (\sin(t))^2 - (\cos(t))^2 \sin(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} -\sin(t) + (\sin(t))^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\cos(t) + \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))\right]_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*2+2+2=6 Punkte*)
Betrachten Sie den auf der xy-Ebene liegenden Halbkegel

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4\sqrt{y^2+z^2} \le x \le 4 \;,\; z \ge 0\right\}$$

mit Dichte $\rho(x,y,z) = 3$.

(i) Schreiben Sie K als Normalbereich bezüglich der x-Achse:

$$K = \boxed{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x \le 4 \;,\; 0 \le z \le \frac{1}{4}x \;,\; -\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2} \le y \le \sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2}\right\}}$$

(ii) Geben Sie K in Zylinderkoordinaten bezüglich x an:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in [0,4] \;,\; r \in \boxed{\left[0, \frac{1}{4}x\right]} \;,\; \varphi \in \boxed{[0,\pi]} \right\}$$

(iii) Geben Sie die Masse m und die x-Koordinate des Schwerpunktes $X_S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von K an:

$m = \boxed{2\pi}$ $\qquad$ $x = \boxed{3}$

(i) Mit $0 \leq 4\sqrt{y^2+z^2} \leq 4$ und $(x,0,0) \in K$ für $x \in [0,4]$ folgt $0 \leq x \leq 4$.
Für $y = 0$ folgt nun aus $0 \leq z$ und $4\sqrt{z^2} \leq x$ die Bedingung $0 \leq z \leq \frac{1}{4}x$. Die Grenzen für y ergeben sich nun aus der Bedingung

$$4\sqrt{y^2+z^2} \leq x \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{x^2}{16} - z^2$$

(ii) Die Grenzen für r ergeben sich aus

$$x \geq \sqrt{y^2+z^2} = r\,,$$

die für φ aus der Bedingung $z \geq 0$ (und somit $\sin(\varphi) \geq 0$).

(iii) m: Hier gibt es verschiedene Wege, die zum Ziel führen, beispielsweise:

- Berechnung mit (i):

$$m = \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} \int_{-\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}^{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}} 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \lim_{t \to \frac{1}{4}x} \left[\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2} + \frac{x^2}{32}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2}}\right)\right]_0^t \mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \lim_{t \to \frac{1}{4}x} \left(\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{x^2}{16} - t^2} + \frac{x^2}{32}\arctan\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{x^2}{16} - 1}}\right)}_{\to\infty} - 0\right) \mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \frac{x^2}{32}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\pi\,x^3}{32}\right]_0^4 = 2\pi$$

- Berechnung mit (ii):

$$m = \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} \int_0^{\pi} \rho(x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\pi \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = 3\pi\int_0^4 \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^3}{32}\right]_0^4 = 2\pi$$

x: Es gilt

$$x = \frac{\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}{\int\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}$$

Bestimmung des Zählers

- mit (i):

$$\begin{aligned}
\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} \int\limits_{-\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}^{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}} 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} 2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 x \lim_{t\to\frac{1}{4}x}\left[\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}+\frac{x^2}{32}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}\right)\right]_0^t \mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 x \lim_{t\to\frac{1}{4}x}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{x^2}{16}-t^2}+\frac{x^2}{32}\arctan\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{x^2}{16}-1}}\right)}_{\to\infty}-0\right)\mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 \frac{x^3}{32}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\pi\,x^4}{128}\right]_0^4 = \left(\frac{3\pi\cdot 2^{2\cdot 4}}{2^7}-0\right) = 6\pi
\end{aligned}$$

- mit (ii):

$$\begin{aligned}
\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x}\int\limits_0^{\pi} \rho(x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&= 3\pi\int\limits_0^4 x\int\limits_0^{\frac{1}{4}x} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = 3\pi\int\limits_0^4 x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x \\
&= 3\pi\int\limits_0^4 \frac{x^3}{32}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\pi\,x^4}{128}\right]_0^4 = 6\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(1+1= 2 Punkte)*
Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(t) := \left((1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)^2 + 3\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - \frac{4}{3}\mathrm{i}\right) + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}\ .$$

(i) Geben Sie die Fourierreihe von f in komplexer Form an:

$$f(t) = \boxed{4\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \boxed{-2}$$

$$+ \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \boxed{-4\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}$$

(ii) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f in reeller Form mit Sinus- und Kosinusgliedern:

$$f(t) = \boxed{-2 + 8\sin(4t)}$$

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left((1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}\right)^2 + 3\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - \frac{4}{3}\mathrm{i}\right) + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \\ &= \underbrace{(1-2\mathrm{i})^2}_{=-3-4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 2(1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-4\cdot\mathrm{i}t} + 3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 4\mathrm{i} + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \\ &= -4\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 2 + 4\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt für $k \geq 0$:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \begin{cases} -4 & , k = 0 \\ 0 & , k > 0 \end{cases}$$

$$b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} \mathrm{i}(-4\mathrm{i} - 4\mathrm{i}) & , k = 4 \\ 0 & , k \neq 4 \end{cases} = \begin{cases} 8 & , k = 4 \\ 0 & , k \neq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 4 *(1+3+2=6 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1 - t^2 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

(i) Skizzieren Sie f für $t \in [-3, 3]$.

(ii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}f)(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

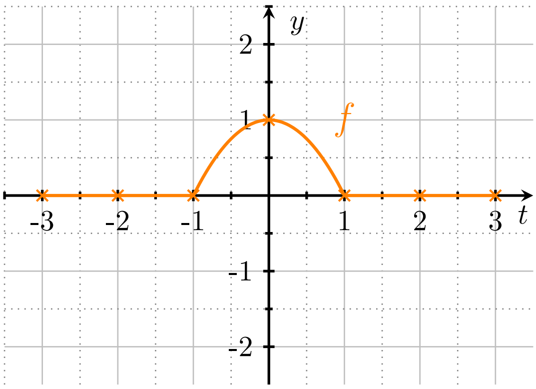
(iii) Bestimmen Sie für die Faltung $f * \chi_{[-1,1]}$ von f mit dem Rechteckimpuls

$$\chi_{[-1,1]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t.$$

(i) Wir erhalten folgende Skizze:



(ii) Wir berechnen für $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\mathrm{i}\omega}\int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\left(\left[\frac{2}{\omega^2}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\left[\frac{2}{\omega^2}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{2}{\mathrm{i}\omega^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{\omega^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right) - \frac{4}{\omega^3}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right) \\
&= -\frac{4\cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(\omega)}{\omega^3}
\end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \tag{1}$$

Alternativer Lösungsweg:
(für $\omega \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \left(\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega}t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \int\limits_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{i}t}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \left[\frac{-2t}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} + \int\limits_{-1}^{1}\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \left[\frac{2\mathrm{i}}{\omega^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{4}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2} + \frac{4}{\omega^3}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2} = -\frac{4\cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(\omega)}{\omega^3}
\end{aligned}
$$

(iii) Es gilt

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t = (\mathcal{F}(f*\chi_{[-1,1]}))(0) = (\mathcal{F}f)(0)\cdot(\mathcal{F}\chi_{[-1,1]})(0)
$$

Mit

$$
(\mathcal{F}\chi_{[-1,1]})(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)
$$

und (1) erhalten wir

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{F}f)(0)\cdot 2\,\mathrm{sinc}(0) = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}.
$$

Alternativer Lösungsweg:

Es gilt mit $f(t) = 0$, $|t| > 1$:

$$
(f*\chi_{[-1,1]})(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-1}^{1} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s
$$

für $s \in [-1,1]$ Hierbei gilt $\chi_{[-1,1]}(t-s) \neq 0$ nur für $1+t \geq s \geq -1+t$, d. h.

- $\chi_{[-1,1]}(t-s) = 0$ für $t > 2$ oder $t < -2$.
- Für $t \in [-2,0]$ genügt es, $-1 \leq s \leq 1+t$ zu betrachten. (Für $s > 1+t$ ist $f(s) = 0$.)
- Für $t \in [0,2]$ genügt es, $1 \geq s \geq -1+t$ zu betrachten. (Für $s < -1+t$ ist $f(s) = 0$.)

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-2}^{0}\int_{-1}^{1+t} (1-s^2)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2}\int_{-1+t}^{1} (1-s^2)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-2}^{0} \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1+t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{2} \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1+t}^{1} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-2}^{0} (1+t) - \frac{(1+t)^3}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2} \frac{2}{3} - (-1+t) + \frac{(-1+t)^3}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{(1+t)^2}{2} - \frac{(1+t)^4}{12} + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{2}{3}t - \frac{(-1+t)^2}{2} + \frac{(-1+t)^4}{12}\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

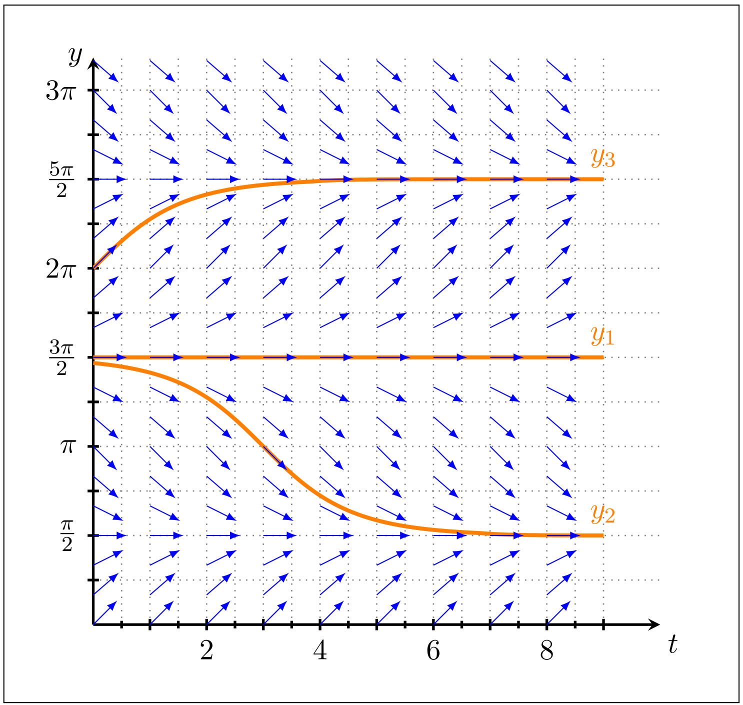
Aufgabe 5 *(2+(1+2)=5 Punkte)*

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(y(t))$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung.

Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



y_1, y_2, y_3: Drei Beispiele für mögliche Lösungen.

(ii) Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$.

(i) Skizze des Richtungsfeld mit möglichen Lösungen y_1, y_2, y_3: Siehe Abbildung.
Erkennen der Nullstellen ($\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$) liefert konstante Lösungen.

(ii) a) Doppelter Eigenwert $\lambda = -2$ mit Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Wir berechnen ein Fundamentalsystem gemäß Fall c aus Vorlesung:

$$(A - \lambda I)w = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich zum Beispiel der Nebenvektor $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier ist zu beachten: Der zweite Eintrag des Vektors kann beliebig gewählt werden!

Dies wird nun in die entsprechende Formel eingesetzt:

$$\left\{ \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\mathrm{e} \cdot y + \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y'(t) = -\mathrm{e}y(t)$. Durch Separation erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(t)}{y(t)} \, \mathrm{d}t &= \int -\mathrm{e} \, \mathrm{d}t \\ \ln |y(t)| &= -\mathrm{e}t + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Anwenden der Exponentialfunktion und Auflösen des Betrages liefern die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_h(t) = K\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Alternativer Lösungsweg:

y_h ergibt sich auch direkt aus unserer allgemeinen Lösungstheorie.

Um nun eine Lösung der DGL $y' = -\mathrm{e}y + \mathrm{e}^{-t}$ zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz $y(t) = K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}$ (Variation der Konstanten). Dann ist

$$y'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} - \mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}$$

Wir setzen diese Ausdrücke für $y(t)$ und $y'(t)$ in die ursprüngliche DGL ein:

$$\begin{aligned} &K'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} - \mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} = -\mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} + \mathrm{e}^{-t} \\ \Longleftrightarrow &K'(t) = \mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t} \\ \Longrightarrow &K(t) = \int K'(t)\mathrm{d}t = \int (\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t})\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t}}{\mathrm{e}-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet folglich

$$\begin{aligned} y(t) = K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t}}{\mathrm{e}-1} + C \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1} + C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $C = 0$, da

$$\frac{1}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} + C.$$

Insgesamt ergibt sich somit die Lösung

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1}.$$

Aufgabe 7 *(1+1+1+2+2=7 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 + 2y_2 + \mathrm{e}^{at}, \quad y_2' = -2y_1 + ay_2 + 2\mathrm{e}^{at}, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

$$y' = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} y + e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \text{ mit } A := \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \text{ und } b(t) := e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

Weil (1) von der Form $y' = f(t, y)$ ist und $t \mapsto f(t, y) := Ay + b(t)$ nicht konstant ist für ein (alle) $y \in \mathbb{R}^2$, ist (1) nicht autonom.

(iii) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare, homogene System $y' = Ay$ stabil?

$$a < 0$$

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

$$\left\{ e^{at}\begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}, e^{at}\begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} \right\} = \left\{ e^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, e^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right\}$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zu System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$$y(t) = e^{at}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sin(2t) - \cos(2t) + 1 \\ \sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(iii) Aufgrund von Satz 17.3.5 (Kapitel 17.3.3 Stabilität linearer DGL-Systeme) ist das homogene System $y' = Ay$ stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben. Da die Eigenwerte von A gegeben sind durch

$$a + 2\mathrm{i} \quad \text{und} \quad a - 2\mathrm{i}\,,$$

ist das homogene System stabil genau dann, wenn $a < 0$.

(iv) Hier greift Fall b aus dem Skript. Zunächst ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenwerten $a \pm 2\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Weiter ist ein Eigenvektor v von $A = aI + J$ zum Eigenwert $a + \mathrm{i}$ gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \alpha + \mathrm{i}\beta \quad \text{mit} \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Aufgrund von Satz 17.3.4 ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$ daher gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left\{\mathrm{e}^{at}(\alpha\cos(2t) - \beta\sin(2t)), \mathrm{e}^{at}(\alpha\sin(2t) + \beta\cos(2t))\right\} \\ &= \left\{\mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Da

$$A = aI + J \quad \text{mit} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und J offensichtlich mit I (Einheitsmatrix!) vertauscht/kommutiert, gilt nach Satz 17.3.10 (Eigenschaften des Matrixexponentials)

$$e^{At} = e^{aIt}e^{Jt} = e^{at}e^{Jt}.$$

Weiter gilt mit Aufgabe 9.1

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos(-2t) & -\sin(-2t) \\ \sin(-2t) & \cos(-2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

(Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel t).

Alternativer Lösungsweg:
Alternativ kann man mit Aufgabe 9.1 das Matrixexponential e^{At} auch direkt ausrechnen - in dieser Aufgabe wurde nämlich $\mathrm{e}^{\tilde{A}t}$ berechnet mit $\tilde{A} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Aufgrund von Satz 17.3.12 (Zusammenhang zwischen Matrixexponential und Fundamentalsystemen) bilden die Spalten von

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos(2t) & \mathrm{e}^{at}\sin(2t) \\ -\mathrm{e}^{at}\sin(2t) & \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$.

$$\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \\ -\mathrm{e}^{at}\sin(2t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\sin(2t) \\ \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \end{pmatrix}\right\}$$

(v) Aufgrund von Korollar 17.3.14 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (0,1)^\top$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{At}y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} \underbrace{b(s)}_{=\mathrm{e}^s} \,\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2(t-s)) & \sin(2(t-s)) \\ -\sin(2(t-s)) & \cos(2(t-s)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2(t-s)) + 2\sin(2(t-s)) \\ -\sin(2(t-s)) + 2\cos(2(t-s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2(t-s)) + \cos(2(t-s)) \\ -\frac{1}{2}\cos(2(t-s)) - \sin(2(t-s)) \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sin(2t) - \cos(2t) + 1 \\ \sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Alternativer Lösungsweg:

(für das alternative Fundamentalsystem)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{At}y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} b(s) \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(-2(t-s)) & -\sin(-2(t-s)) \\ \sin(-2(t-s)) & \cos(-2(t-s)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(-2(t-s)) - 2\sin(-2(t-s)) \\ \sin(-2(t-s)) + 2\cos(-2(t-s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(-2(t-s)) + \cos(-2(t-s)) \\ -\frac{1}{2}\cos(-2(t-s)) + \sin(-2(t-s)) \end{pmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\sin(-2t) - \cos(-2t) + 1 \\ -\sin(-2t) + \frac{3}{2}\cos(-2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$