Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 08.04.2024 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **15.04.2024** bis **18.04.2024** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

Es sei die Quadrik $\mathcal{Q}$ definiert durch

$$\mathcal{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9\,x_1^2 + 6\,x_2^2 - 4\,x_1x_2 + 6\sqrt{5}\,x_1 - 8\sqrt{5}\,x_2 - 10 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform sowie ein kartesisches Koordinatensystem, in dem diese angenommen wird.

Aufgabe 2 (*10 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} 2\,x\,\mathrm{e}^{(x^2)}\;\mathrm{d}\,x$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{-3x^2-8x+14}{(x+2)(x-1)^2}\;\mathrm{d}\,x$ **(c)** $\displaystyle\int \sin(4x)(x^2+3)\;\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 2n+3 & 4n \\ -n & 3-2n \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie A^3.

Aufgabe 4 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwichsatzes den Grenzwert der Folge $\left(\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n+5^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Bestimmen Sie die folgenden Funktionsgrenzwerte

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x-1}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4^x}{\sin(\pi x)}$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie jeweils eine geeignete Minorante oder Majorante finden.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^3+33n}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+(-1)^n\cdot 7)^n}{n!}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^n}{n^2}$ konvergiert.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2^2 - 10x_1 - 38x_2$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x) = \boxed{} \quad \text{und} \quad Hf(x) = \boxed{}\,.$$

(b) Die Funktion f hat eine einzige kritische Stelle x. Bestimmen Sie diese und entscheiden Sie, ob ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Bei der Stelle $x = \boxed{}$ handelt es sich um ein $\boxed{}$.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Wir definieren $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als die lineare Abbildung, welche

$$\alpha(v_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha(v_2) = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \alpha(v_3) = \begin{pmatrix}0\\-1\\-3\end{pmatrix} \quad \text{erfüllt für} \quad v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_2 := \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den zweiten und den dritten Standardbasisvektor in $\mathbb{R}^3$ jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2 und v_3 dar.

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \boxed{} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Matrixbeschreibung der Abbildung α bezüglich der Standardbasis E des $\mathbb{R}^3$.

$${}_E\alpha_E = \boxed{}\,.$$

Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\, x^2$.

(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$f'(x) = \boxed{}$ $f''(x) = \boxed{}$

(b) Geben Sie ein Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ an, das $x_0 = 1$ im Innern enthält und in dem f streng monoton und differenzierbar ist. Geben Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} von f an der Stelle $y = f(x_0)$ an.

$[a,b] = \boxed{}$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} f^{-1}(y)\Big|_{y=f(x_0)} = \boxed{}$

(c) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an.

$T_2(f,x,1) = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Gegeben sei die Kurve K mit Parametrisierung

$$C\colon\ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von C, den Betrag dieser Ableitung und die Länge der Kurve K.

$C'(t) = \boxed{}$ $|C'(t)| = \boxed{}$ $L(K) = \boxed{}$

Aufgabe 11 (*2 Punkte*)

Zeichnen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $w^4 = -16$ in die Gaußsche Zahlenebene ein.