Modulprüfung (Nr. 1077320000)

11.09.2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **9 Aufgaben**.
- Je nach Aufgabe können 4 oder 6 Punkte erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz, berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a + x\sin(bx).$$

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie a und b, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = 3 - x^2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bezeichne i die imaginäre Einheit und sei

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

(a) Berechnen Sie $\bar{z}$ und $|z|$.

(b) Schreiben Sie z in Polarform.

(c) Berechnen Sie z^{2024}.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix:

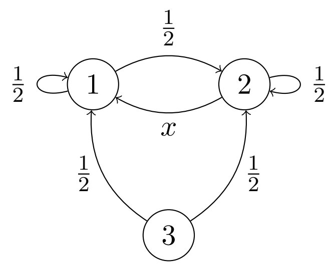
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^\intercal$ ein Eigenvektor von A ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit der entsprechenden algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit.

(c) Ermitteln Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Markow-Kette gegeben durch den folgenden Übergangsgraphen:



(a) Bestimmen Sie $x \in [0,1]$ und schreiben Sie die entsprechende Übergangsmatrix auf.

(b) Berechnen Sie $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.

(c) Ermitteln Sie alle Kommunikationsklassen. Ist die Markow-Kette irreduzibel?

(d) Finden Sie alle stationären Verteilungen.

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^{2x}.$$

(a) Schreiben Sie das charakteristische Polynom auf und finden Sie alle Nullstellen mit jeweiliger Vielfachheit.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(c) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit

$$y(0) = 5, \quad y'(0) = 8.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$xy' + 2y' - y = (x+2)^2.$$

(a) Bestimmen Sie, ob die Differentialgleichung linear bzw. separierbar ist.

(b) Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(0) = 4$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$3y_{k+2} - 4y_{k+1} + y_k = 0, \quad y_0 = 3, \quad y_1 = \frac{13}{3}.$$

(a) Berechnen Sie y_2 als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Finden Sie eine abgeschlossene Formel für das allgemeine Folgenglied y_k.

(c) Ermitteln Sie $\lim_{k\to\infty} y_k$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das Polygon Π im ersten Quadranten von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$x_1 \leq 10 \quad x_2 \leq 10, \quad x_1 - x_2 + 8 \geq 0.$$

(a) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass das Ungleichungssystem als $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ dargestellt werden kann.

(b) Skizzieren Sie das Polygon Π und bestimmen Sie seine Ecken.

(c) Finden Sie das Maximum und die Maximalstelle auf Π der Funktion

$$F(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2.$$