Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

31. August 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I - III

1. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 180 min.

Zu bearbeiten sind alle zehn Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Anfang Oktober im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 19. Oktober 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen

a) $(z-1)^2 = i$

b) $|z+1| = 2z$

in der Form $z = a + i\,b$ an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Stammfunktionen zu

a) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x - 3}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Kegelschnitt $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

a) Geben Sie die Normalform des Kegelschnitts an. Um welchen Kurventyp handelt es sich?

b) Bestimmen Sie die Hauptachsen des Kegelschnittes.

c) Skizzieren Sie den Kegelschnitt in der xy - Ebene.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichungen zu den gegebenen Anfangswerten

a) $y^3 y' = x^3$, $y(0) = 1$,

b) $y' = \dfrac{y(y+x)}{x^2}$, $x > 0$, $y(1) = 1$,

c) $y' + 2y = 5\cos x$, $y(0) = 2$.

Aufgabe 5

Gegeben sei das vom reellen Parameter α abhängige Vektorfeld

$$v_\alpha := \begin{pmatrix} y + z + yz \\ x + z + xz + \alpha z^2 \\ x + y + xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$c : t \mapsto (t, t^2, t^3)^T \ , \ 0 \le t \le 1 \ .$$

a) Bestimmen Sie den Parameter $\alpha = \alpha^*$ so, daß das Vektorfeld v_{α^*} ein Potential $\Phi(x, y, z)$ mit $\Phi(0, 0, 0) = 0$ besitzt und bestimmen Sie dieses.

Das Arbeitsintegral E_α ist definiert durch $\quad E_\alpha := \int_c v_\alpha$.

b) Berechnen Sie E_α für $\alpha = \alpha^*$.

c) Berechnen Sie E_α für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu c): Zerlegen Sie das Vektorfeld v_α so in zwei Summanden, daß Sie das Ergebnis aus Teil b) verwenden können.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz für das Vektorfeld $v := (-xz^2, xz, z)^T$.

b) Berechnen Sie den Fluß $\Phi(R)$ von v durch die Oberfläche der Halbkugel

$$H(R) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0\}$$

von innen nach außen.

Aufgabe 7

Gegeben seien folgende Körper:

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2\} \\ K_2 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 1 - 4y^2\} \\ S &:= K_1 \cap K_2 \ . \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Projektion B des Körpers S in die xy - Ebene.

b) Geben Sie eine Parametrisierung von B in elliptischen Koordinaten an.

c) Berechnen Sie das Volumen von S.

Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z^3 + 2z^2} \ .$$

b) Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurent-Reihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = -2$ im Gebiet $K = \{z \in \mathbf{C} : |z+2| < 2\}$.

c) Geben Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $z_1 = 3 + 4i$ an.

Aufgabe 9

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y'''(t) - y(t) - 1 = 0\ , \quad y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 1\ .$$

a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch Laplace-Transformation $y(t) \mapsto \tilde{y}(s)$ über ?

b) Lösen Sie diese Gleichung nach $\tilde{y}(s)$ auf.

c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die reelle Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

Aufgabe 10

Gegeben sei die singuläre analytische Differentialgleichung

$$z^2 w''(z) - 2zw'(z) + (z^2 + 2)w(z) = 0.$$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf die Form

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$$

und bestimmen Sie die Polstellen von $p(z)$ und $q(z)$ sowie deren Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung.

c) Sei λ diejenige Lösung der charakteristischen Gleichung mit dem kleineren Realteil und

$$w(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

die zugehörige Lösung der Differentialgleichung. Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_k mit $c_0 = 1,\ c_1 = 0$ an und bestimmen Sie damit die Lösung $w(z)$ in geschlossener Form.