Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP)

07.08.2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n!}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(2 + \dfrac{1}{2n}\right)^4$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3) + 3}{x^3 + 2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3) - 1}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x))$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{|x|}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -1$ bzw. $x = 2$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von g in 0.

(c) Ist die Funktion g stetig fortsetzbar in $x = 0$?

(d) Finden Sie die Asymptote von g für $x \to +\infty$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Der Sekans hyperbolicus $\operatorname{sech}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\operatorname{sech}(\ln(2))$ als rationale Zahl p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Sekans hyperbolicus.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung sech' des Sekans hyperbolicus.

(d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sekans hyperbolicus.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = ax + \cos(bx).$$

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = 1 + x - 2x^2.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(x^3 + \sin(3x)\big)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx$

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 1$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = y^4 + 2x^2y - 32y.$$

(a) Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(0, 1)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal- bzw. Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x + 2)^2 - y^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Aufgabe 13 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 4y = 8.$$

(a) Schreiben Sie das entsprechende charakteristische Polynom P auf und finden Sie alle Nullstellen von P mit jeweiliger Vielfachheit.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(c) Finden Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2, y'(0) = 1$.