

Klausur zur Höheren Mathematik 3
für **Elektroingenieure**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben (oder alternativ eine DIN A4-Seite doppelseitig) sowie Zeichenmaterial.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es gibt insgesamt **7** Aufgaben.
 - In **den Aufgaben 1, 3, 4, 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
 - Bei **den anderen Aufgaben 2, 5, 7** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen mit Parametern $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$ können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$(\sin(x))^2$	$(\cos(x))^2$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\ln(\sin(x))$	
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	

- Die Prüfungsergebnisse werden über das C@MPUS-Portal bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 1** (5+2+3=10 Punkte)(i) Sei $D := [-1, 0] \times [0, 1]$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3v \\ e^u \\ 4v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.

Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2}{y}$$

das Oberflächenintegral

$$\int_F f \, d\sigma.$$

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ (\sin(x))^2 y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g$ und $\operatorname{rot} g$.(iii) Wir betrachten nun den Würfel $W = [0, \pi]^3$ mit Rand ∂W und äußerer Normalen $\mathbf{n}(x, y, z)$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial W} \langle g, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma$$

mit g aus (ii).*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass W Normalbereich bezüglich aller Koordinatenachsen ist.

Aufgabe 2 (2+1+2=5 Punkte)

Gegeben sei die ausgehöhlte Kugel

$$S := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 \right\}.$$

(i) Geben Sie S in Kugelkoordinaten an.

Bestimmen Sie hierzu die Intervalle I_r , I_φ und I_θ so, dass

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid r \in I_r, \varphi \in I_\varphi, \theta \in I_\theta \right\}$$

gilt:

$$I_r = \boxed{}, \quad I_\varphi = \boxed{}, \quad I_\theta = \boxed{}$$

(ii) Bestimmen Sie die Abstandsfunktion d , welche den Abstand eines Punkts zur z -Achse in Kugelkoordinaten beschreibt:

$$d(r, \varphi, \theta) = \boxed{}$$

(iii) Die Dichte ρ der Kugel sei nun gegeben mittels $\rho(x, y, z) = 2$.

Bestimmen Sie im folgenden Ausdruck den Integranden so, dass besagter Ausdruck mit dem Trägheitsmoment von S bezüglich der z -Achse übereinstimmt:

$$\Theta = \int_{I_r \times I_\varphi \times I_\theta} \boxed{} d(r, \varphi, \theta)$$

Berechnen Sie ferner ebendieses Trägheitsmoment:

$$\Theta = \boxed{}$$

Hinweis: Es gilt $\int_0^{2\pi} |\cos(x)| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$.

Name,
Vorname:

Matrikel-
Nummer:

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die 2π -periodische, gerade Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch

$$f(t) := 2 + \frac{3\pi}{8} |\sin(t)| \cos(t).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 und b_1 der zugehörigen Fourierreihe.

Aufgabe 4 (1+2+4=7 Punkte)

Gegeben sei der Parameter $\omega \in (0, \infty)$ sowie die Funktion

$$b_\omega: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{-t\omega t}.$$

- (i) Begründen Sie, ob b_ω von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma > 0$ ist.
- (ii) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}b_\omega)(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$.

- (iii) Lösen Sie mittels (ii) das folgende AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= b_\omega(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Greifen Sie auf die bekannten Rechenregeln und Beispiele aus dem Skript zurück.

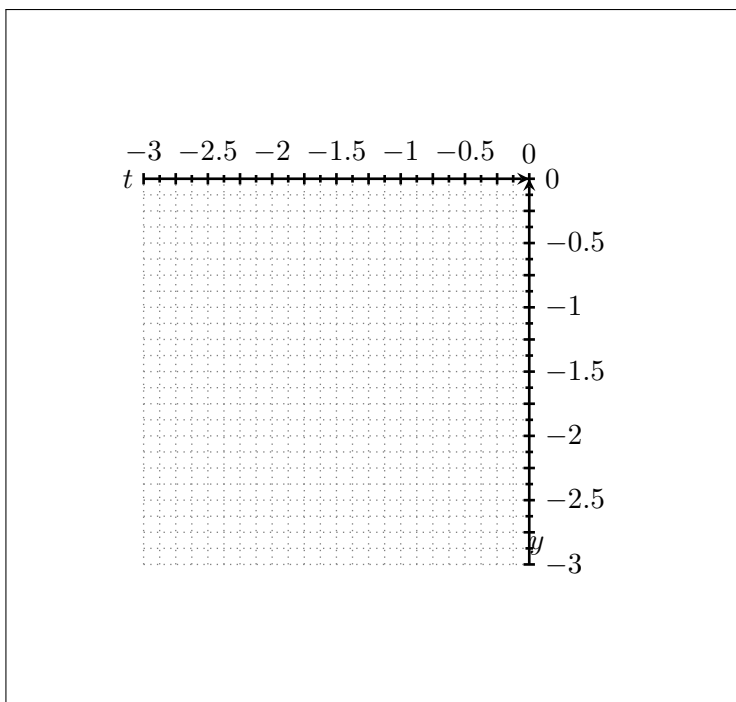
Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)

- (i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = t \cdot y(t)$$

für $-3 \leq t \leq 0$ sowie $-3 \leq y \leq 0$ und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung.

Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



- (ii) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -4 + 2i$ und $\lambda_2 = -4 - 2i$ mit den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$:

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 6** (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \sin(t) - y \cos(t) = \sin^3(t), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 7 (1+1+1+3+1=7 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + y_2 + e^t, \quad y_2' = y_2. \quad (1)$$

- (i) Schreiben Sie das System (1) in der Form
- $y' = Ay + b(t)$
- , mit
- $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- und
- $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$
- .

- (ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

- (iii) Ist das homogene System
- $y' = Ay$
- stabil?

- (iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems
- $y' = Ay$
- an.

- (v) Bestimmen Sie die Lösung des zum System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung
- $y(0) = (1, 1)^T$
- .

 $y(t) =$