Aufgabe 1 (*5+2+3=10 Punkte*)

(i) Sei $D := [-1, 0] \times [0, 1]$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho\colon D \to \mathbb{R}^3\,, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3v \\ \mathrm{e}^u \\ 4v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon \left\{ (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}\,, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2}{y}$$

das Oberflächenintegral

$$\int\limits_F f \,\mathrm{d}\sigma\,.$$

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ (\sin(x))^2\, y \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g$ und $\operatorname{rot} g$.

(iii) Wir betrachten nun den Würfel $W = [0, \pi]^3$ mit Rand ∂W und äußerer Normalen $\mathrm{n}(x, y, z)$. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\partial W} \langle g, \mathrm{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$$

mit g aus (ii).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass W Normalbereich bezüglich aller Koordinatenachsen ist.

Lösungsweg:

(i) Wir berechnen zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^u \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\,.$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^u \\ 0 \\ -3\mathrm{e}^u \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\left\| \frac{\partial \rho}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \rho}{\partial v}(u,v) \right\| = \sqrt{16\mathrm{e}^{2u} + 9\mathrm{e}^{2u}}$$
$$= 5\mathrm{e}^u$$

und somit

$$\int_D f \,\mathrm{d}\sigma = \int_D f(\rho(u,v)) \left\| \frac{\partial \rho}{u}(u,v) \times \frac{\partial \rho}{v}(u,v) \right\| \mathrm{d}(u,v)$$
$$= \int_{-1}^{0} \int_0^1 (9v^2)\mathrm{e}^{-u} \cdot 5\mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 5 \cdot \int_{-1}^{0} 1 \,\mathrm{d}u \cdot \int_0^1 9v^2 \,\mathrm{d}v$$
$$= 5 \cdot (0-(-1)) \cdot \left[3v^2\right]_0^1 = 5 \cdot (3-0) = 15\,.$$

(ii) Es gelten

$$\operatorname{div} g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^3\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left((\sin(x))^2 y\right) + \frac{\partial g}{\partial z}(\sin(y)z)$$
$$= 3x^2 + (\sin(x))^2 = 3x^2 + (\sin(x))^2$$

und

$$\operatorname{rot} g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(0) - \frac{\partial f}{\partial z}\left((\sin(x))^2 y\right) \\ \frac{\partial g}{\partial z}\left(x^3\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}\left((\sin(x))^2 y\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x^3\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2y\sin(x)\cos(x) \end{pmatrix}.$$

(iii) Wir erhalten mit dem Satz von Gauß:

$$\int_{\partial W} \langle g, \mathrm{n}\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_W \operatorname{div} g(x,y,z) \,\mathrm{d}(x,y,z)$$
$$= \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi 3x^2 + (\sin(x))^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^\pi \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \cdot \int_0^\pi 3x^2 + (\sin(x))^2 \,\mathrm{d}x$$
$$= \pi^2 \cdot \left[x^3 + \frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}\right]_0^\pi = \pi^5 + \frac{\pi^3}{2}\,.$$

Aufgabe 2 *(2+1+2=5 Punkte)*
Gegeben sei die ausgehöhlte Kugel

$$S := \left\{ (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 \right\} .$$

(i) Geben Sie S in Kugelkoordinaten an.
Bestimmen Sie hierzu die Intervalle I_r, I_φ und I_θ so, dass

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in I_r \;,\; \varphi \in I_\varphi \;,\; \theta \in I_\theta \right\}$$

gilt:

$$I_r = \boxed{[1, 2]} \quad , \quad I_\varphi = \boxed{[0, 2\pi]} \quad , \quad I_\theta = \boxed{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

(ii) Bestimmen Sie die Abstandsfunktion d, welche den Abstand eines Punkts zur z-Achse in Kugelkoordinaten beschreibt:

$$d(r, \varphi, \theta) = \boxed{r\cos(\theta)}$$

(iii) Die Dichte ρ der Kugel sei nun gegeben mittels $\rho(x, y, z) = 2$.
Bestimmen Sie im folgenden Ausdruck den Integranden so, dass besagter Ausdruck mit dem Trägheitsmoment von S bezüglich der z-Achse übereinstimmt:

$$\Theta = \int\limits_{I_r \times I_\varphi \times I_\theta} \boxed{2r^4 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^3} \, \mathrm{d}(r, \varphi, \theta)$$

Berechnen Sie ferner ebendieses Trägheitsmoment:

$$\Theta = \boxed{\frac{496}{15}\pi}$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |\cos(x)| \, \mathrm{d}x = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$.

Lösungsweg:

(i) Einsetzen der Kugelkoordinaten in die erste Ungleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sqrt{r^2 \left(\cos\left(\varphi\right)\right)^2 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^2 + r^2 \left(\sin\left(\varphi\right)\right)^2 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^2 + r^2 \left(\sin\left(\theta\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^2 + r^2 \left(\sin\left(\theta\right)\right)^2} = r \leq 2\,. \end{aligned}$$

(ii) Der Abstand eines Punktes $(x,y,z)^T$ zur z-Achse ist gegeben durch $\sqrt{x^2+y^2}$. Wir erhalten also:

$$d(r,\varphi,\theta) = \sqrt{r^2\left(\cos\left(\varphi\right)\right)^2\left(\cos\left(\theta\right)\right)^2 + r^2\left(\sin\left(\varphi\right)\right)^2\left(\cos\left(\theta\right)\right)^2} = r\left|\cos(\theta)\right| \,.$$

(iii) Sei $\tilde{S} := I_r \times I_\varphi \times I_\theta$.
Das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse ist gegeben durch

$$\int\limits_S \rho(x,y,z)(\tilde{d}(x,y,z))^2 \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

mit Abstand $\tilde{d}$ zur entsprechenden Achse. Mit dem Transformationssatz erhalten wir entsprechend in Kugelkoordinaten:

$$\int\limits_S \rho(x,y,z)(\tilde{d}(x,y,z))^2 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int\limits_{\tilde{S}} 2(r\cos(\theta))^2 \cdot r^2\cos(\theta)\,\mathrm{d}(r,\varphi,\theta)\,.$$

Wir erhalten hieraus mit (i) und (ii) und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^4\left(\cos\left(\theta\right)\right)^3 \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \int\limits_1^2 2r^4\,\mathrm{d}r \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\left(1-(\sin(\theta))^2\right)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{2}{5}r^5\right]_1^2 \cdot 2\pi \cdot \left[\sin(\theta) - \frac{1}{3}\left(\sin(\theta)\right)^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \underbrace{\left(\frac{2}{5}\left(32-1\right)\right)}_{=\frac{62}{5}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{3}-(-1+\frac{1}{3})\right)}_{=\frac{4}{3}} \\
&= \frac{496\pi}{15}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)
Die 2π-periodische, gerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch

$$f(t) := 2 + \frac{3\pi}{8}|\sin(t)|\cos(t)\,.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 und b_1 der zugehörigen Fourierreihe.

Lösungsweg: Aus Symmetriegründen ($f(t) = f(-t)$) gilt $b_1 = 0$.
Wir berechnen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 2\cos(t) + \frac{3\pi}{8}|\sin(t)|(\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = \\ &= 0 + 2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{3}{8}\sin(t)(\cos(t))^2\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Mittels der Substitution $x = \cos(t)$ – und somit $x'(t) = -\sin(t)$ – erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} a_1 &= \int\limits_{1}^{-1} -\frac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1}\frac{3}{4}x^2\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{4}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*1+2+4=7 Punkte*)
Gegeben sei der Parameter $\omega \in (0, \infty)$ sowie die Funktion

$$b_\omega\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\omega t\,.$$

(i) Begründen Sie, ob b_ω von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma > 0$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}b_\omega)(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(iii) Lösen Sie mittels (ii) das folgende AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= b_\omega(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Greifen Sie auf die bekannten Rechenregeln und Beispiele aus dem Skript zurück.

Lösungsweg:

(i) Für $t \geq 0$ gilt:

$$|b_\omega(t)| = \left|\mathrm{e}^{-t}\omega t\right| \leq |\omega t| \; .$$

Da Polynome von exponentieller Ordnung für beliebiges $\gamma > 0$ sind, trifft dies auch auf b_ω zu.

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}b_\omega)(z) &= \omega(\mathcal{L}(t\mathrm{e}^{-t}))(z)\\ &= \omega(\mathcal{L}(t^1))(z+1)\\ &= \omega \cdot \frac{1}{(z+1)^2}\,.\end{aligned}$$

(iii) Wir erhalten mit (ii):

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{(z+1)^2} &= (\mathcal{L}b_\omega)(z) = (\mathcal{L}(y'+y))(z)\\ &= (\mathcal{L}y')(z) + (\mathcal{L}y)(z) = z(\mathcal{L}y)(z) - y(0) + (\mathcal{L}(y))(z)\,,\end{aligned}$$

woraus sich mit $y(0) = 0$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\omega}{(z+1)^3}$$

ergibt und somit

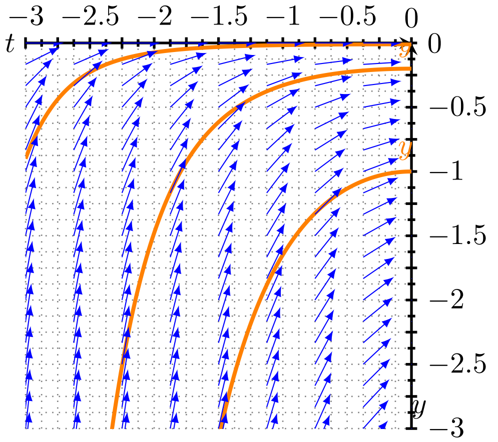
$$\begin{aligned}y(t) &= \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(z+1)^3}\right)\right)(t)\\ &= \mathrm{e}^{-t} \cdot \frac{\omega}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{z^3}\right)(t)\right)\\ &= \frac{\omega}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 *(2+2=4 Punkte)*

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = t \cdot y(t)$$

für $-3 \leq t \leq 0$ sowie $-3 \leq y \leq 0$ und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung. Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



y_1, y_2, y_3: Drei Beispiele für mögliche Lösungen.

(ii) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -4 + 2\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -4 - 2\mathrm{i}$ mit den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$:

$$\boxed{\left\{ e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right), e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) \right\}}$$

Lösungsweg:

(i) Skizze des Richtungsfeldes mit möglichen Lösungen y_1, y_2, y_3: Siehe Abbildung. Wichtig: Da es $t \cdot y(t)$ ist, muss man einen Unterschied zwischen Pfeilen in der gleichen Zeile erkennen.

(ii) Ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems ist sofort gegeben durch Satz 17.3.4:

$$\left\{ e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right), e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) \right\}.$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \sin(t) - y \cos(t) = \sin^3(t), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Lösungsweg:
Zuerst wird die homogene DGL durch Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned}
&y' \sin(t) - y \cos(t) = 0 \Rightarrow y' \sin(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \sin(t) = y \cos(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin(t)| + \ln|C| = \ln|C \sin(t)| \\
&\Rightarrow y = \pm C \sin(t) = K \sin(t).
\end{aligned}$$

Variation der Konstanten: $K = K(t)$ setzen und ableiten ergibt:

$$K'(t) \sin(t) + \cos(t) K(t).$$

Für die DGL ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
y' = K'(t) \sin(t) + \cos(t) K(t) &\Rightarrow (K'(t) \sin(t) + \cos(t) K(t)) \sin(t) - K(t) \sin(t) \cos(t) = \sin^3(t) \\
&\Rightarrow K'(t) \sin^2(t) = \sin^3(t) \Rightarrow K'(t) = \sin(t) \\
&\Rightarrow K(t) = \int \sin(t) \mathrm{d}t = -\cos(t) + C \\
&\Rightarrow y = (-\cos(t) + C) \sin(t).
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung liefert $C = 2$.
Es ist zu beachten, dass das Teilen durch $\sin(t)$ erlaubt ist, da $\sin(t) = 0$ nur an einzelnen Stellen – d.h. für eine diskrete, nicht-dichte Teilmenge – gilt und die Integration für die dazwischenliegenden Intervalle sinnvoll durchgeführt werden kann.

Aufgabe 7 *(1+1+1+3+1=7 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + y_2 + \mathrm{e}^t, \quad y_2' = y_2. \tag{1}$$

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

Weil (1) von der Form $y' = f(t, y)$ ist und $t \mapsto f(t, y) := Ay + b(t)$ nicht konstant ist für ein (alle) $y \in \mathbb{R}^2$, ist (1) nicht autonom.

(iii) Ist das homogene System $y' = Ay$ stabil?

Nein, da beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ keine negativen Realteile besitzen.

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zum System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 1)^{\mathrm{T}}$.

$$y(t) = e^t \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg:

(iii) Die Eigenwerte berechnen oder ablesen. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1/2} = 1$.

(iv) Berechnung über Fall c) aus der Vorlesung. Doppelter EW mit EV sind

$$\lambda_{1/2} = 1, \quad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun brauchen wir noch den Nebenvektor w:

$$(A - \lambda I)w = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $d = 1$ und c beliebig, wir wählen $c = 0$. Einsetzen in Formel liefert

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(v) Aufgrund von Korollar 17.3.14 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (1,1)^\top$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{At} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} b(s) \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^t \\ e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$