Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **Physiker, Kybernetiker und Mechatroniker**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben (oder alternativ eine DINA4-Seite doppelseitig) sowie Zeichenmaterial.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es gibt insgesamt **12** Aufgaben.
  - In **den Aufgaben 1, 3, 4, 6, 9, 11, 12** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
  - Bei **den anderen Aufgaben 2, 5, 7, 8, 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen mit Parametern $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$ können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.
  Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$(\sin(x))^2$	$(\cos(x))^2$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

- Die Prüfungsergebnisse werden über das C@MPUS–Portal bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 1 (*5+2+3=10 Punkte*)

(i) Sei $D := [-1,0] \times [0,1]$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho\colon D \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3v \\ \mathrm{e}^u \\ 4v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon\ \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y \neq 0\right\} \to \mathbb{R}\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2}{y}$$

das Oberflächenintegral

$$\int\limits_F f \,\mathrm{d}\sigma\,.$$

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ (\sin(x))^2\, y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g$ und $\operatorname{rot} g$.

(iii) Wir betrachten nun den Würfel $W = [0,\pi]^3$ mit Rand ∂W und äußerer Normalen $\mathrm{n}(x,y,z)$.
Berechnen Sie

$$\int\limits_{\partial W} \langle g, \mathrm{n}\rangle\ \mathrm{d}\sigma$$

mit g aus (ii).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass W Normalbereich bezüglich aller Koordinatenachsen ist.

Aufgabe 2 *(2+1+2=5 Punkte)*
Gegeben sei die ausgehöhlte Kugel

$$S := \left\{ (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 \right\} .$$

(i) Geben Sie S in Kugelkoordinaten an.
Bestimmen Sie hierzu die Intervalle I_r, I_φ und I_θ so, dass

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in I_r \ , \ \varphi \in I_\varphi \ , \ \theta \in I_\theta \right\}$$

gilt:

$$I_r \quad = \boxed{} \quad , \quad I_\varphi \quad = \boxed{} \quad , \quad I_\theta \quad = \boxed{}$$

(ii) Bestimmen Sie die Abstandsfunktion d, welche den Abstand eines Punkts zur z-Achse in Kugelkoordinaten beschreibt:

$$d(r, \varphi, \theta) = \boxed{}$$

(iii) Die Dichte ρ der Kugel sei nun gegeben mittels $\rho(x, y, z) = 2$.
Bestimmen Sie im folgenden Ausdruck den Integranden so, dass besagter Ausdruck mit dem Trägheitsmoment von S bezüglich der z-Achse übereinstimmt:

$$\Theta = \int\limits_{I_r \times I_\varphi \times I_\theta} \boxed{} \,\mathrm{d}(r, \varphi, \theta)$$

Berechnen Sie ferner ebendieses Trägheitsmoment:

$$\Theta = \boxed{}$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |\cos(x)| \,\mathrm{d}x = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \,\mathrm{d}x.$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)
Die 2π-periodische, gerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch

$$f(t) := 2 + \frac{3\pi}{8}|\sin(t)|\cos(t)\,.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 und b_1 der zugehörigen Fourierreihe.

Aufgabe 4 (*1+2+4=7 Punkte*)
Gegeben sei der Parameter $\omega \in (0, \infty)$ sowie die Funktion

$$b_\omega\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\omega t\,.$$

(i) Begründen Sie, ob b_ω von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma > 0$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L}b_\omega)(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$.

(iii) Lösen Sie mittels (ii) das folgende AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= b_\omega(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

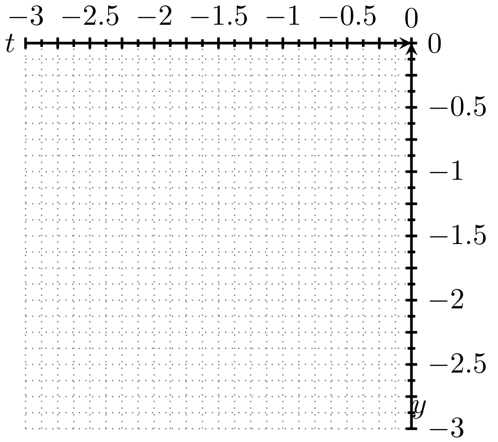
Hinweis: Greifen Sie auf die bekannten Rechenregeln und Beispiele aus dem Skript zurück.

Aufgabe 5 (*2+2=4 Punkte*)

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = t \cdot y(t)$$

für $-3 \leq t \leq 0$ sowie $-3 \leq y \leq 0$ und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung. Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



(ii) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -4 + 2\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -4 - 2\mathrm{i}$ mit den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$:

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \sin(t) - y \cos(t) = \sin^3(t), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 7 (*1+1+1+3+1=7 Punkte*)
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + y_2 + \mathrm{e}^t, \quad y_2' = y_2. \tag{1}$$

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

(iii) Ist das homogene System $y' = Ay$ stabil?

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zum System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 1)^{\mathrm{T}}$.

$y(t) =$

Aufgabe 8 (*1+2+1=4 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mittels

$$f(x+\mathrm{i}y) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^3 - y - xy\,\mathrm{i}\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Bestimmen Sie:

$$\partial_x\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{}$$

$$\partial_x\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{}$$

(ii) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar in z?

$$z \in \boxed{}$$

(iii) Sei C die durch $z\colon [0,1] \to \mathbb{C}\,,\ t \mapsto -\mathrm{i}t$ parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie:

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*2+2=4 Punkte*)

(i) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{z^2}{z^2+1}\mathrm{d}z\,.$$

Denken Sie bei Verwendung von Sätzen oder Formeln an das Überprüfen aller Voraussetzungen!

(ii) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf dem Kreis $|z| = 2$ mit $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$g(z) = (z-1)^2, \quad \text{für } |z| = 2.$$

Berechnen Sie den Wert $g''(1)$.

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy'sche Integralformel ohne Prüfung der Voraussetzungen anwenden.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 10 (*1+2=3 Punkte*)
Im Folgenden bezeichne ln wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus.

(i) Geben Sie $\ln(1-\mathrm{i})$ in der Form $a+b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\ln(1-\mathrm{i}) = \boxed{}$$

(ii) Gegeben sei nun die auf der Kreisscheibe

$$U := B_2(4+2\mathrm{i}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-4-2\mathrm{i}| < 2 \right\}$$

konvergente Potenzreihe

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{5n} (z-4-2\mathrm{i})^{5n} \ .$$

a) Bestimmen Sie $L'(z)$ für $z \in U$:

$$L'(z) = \boxed{}$$

b) Sei $z_1 = 6+2\mathrm{i}$. Geben Sie mithilfe der Taylorreihenentwicklung

$$\ln(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$$

einen geschlossenen Ausdruck für den Wert $L(z_1)$ der Reihe an der Stelle z_1 an:

$$L(z_1) = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (*3+1=4 Punkte*)

(i) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{4\mathrm{e}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+1)^2} \ .$$

Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{res}(f, \mathrm{i}), \operatorname{res}(f, -1)$ und $\operatorname{res}(f, 0)$.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{|z-(-1+\mathrm{i})|=2} f(z) \mathrm{d}z$$

mit der Funktion f aus Teilaufgabe (i).

Aufgabe 12 (*5 Punkte*)
Berechnen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{x^2+4} \sin(\omega x) \mathrm{d}x \qquad \text{für } \omega > 0.$$

Denken Sie bei Verwendung von Sätzen oder Formeln an das Überprüfen aller Voraussetzungen!