Aufgabe 1 (*5+2+3=10 Punkte*)

(i) Sei $D := [-1, 0] \times [0, 1]$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho \colon D \to \mathbb{R}^3\,, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3v \\ \mathrm{e}^u \\ 4v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie für die Funktion

$$f \colon \left\{ (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}\,, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{x^2}{y}$$

das Oberflächenintegral

$$\int\limits_F f \,\mathrm{d}\sigma\,.$$

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ (\sin(x))^2\, y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} g$ und $\operatorname{rot} g$.

(iii) Wir betrachten nun den Würfel $W = [0, \pi]^3$ mit Rand ∂W und äußerer Normalen $\mathrm{n}(x, y, z)$. Berechnen Sie

$$\int\limits_{\partial W} \langle g, \mathrm{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma$$

mit g aus (ii).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass W Normalbereich bezüglich aller Koordinatenachsen ist.

Lösungsweg:

(i) Wir berechnen zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^u \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v) &= \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{e}^u\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\mathrm{e}^u\\ 0\\ -3\mathrm{e}^u\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v)\right\| &= \sqrt{16\mathrm{e}^{2u}+9\mathrm{e}^{2u}}\\ &= 5\mathrm{e}^u\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int\limits_D f\,\mathrm{d}\sigma &= \int\limits_D f(\rho(u,v))\left\|\frac{\partial\rho}{u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{v}(u,v)\right\|\,\mathrm{d}(u,v)\\ &= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{1}(9v^2)\mathrm{e}^{-u}\cdot 5\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 5\cdot\int\limits_{-1}^{0}1\,\mathrm{d}u\cdot\int\limits_{0}^{1}9v^2\,\mathrm{d}v\\ &= 5\cdot(0-(-1))\cdot\left[3v^2\right]_0^1 = 5\cdot(3-0)=15\,.\end{aligned}$$

(ii) Es gelten

$$\begin{aligned}\operatorname{div} g\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \frac{\partial g}{\partial x}\left(x^3\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\left((\sin(x))^2 y\right)+\frac{\partial g}{\partial z}(\sin(y)z)\\ &= 3x^2+(\sin(x))^2 = 3x^2+(\sin(x))^2\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{rot} g\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial y}(0)-\frac{\partial f}{\partial z}\left((\sin(x))^2 y\right)\\ \frac{\partial g}{\partial z}\left(x^3\right)-\frac{\partial f}{\partial x}(0)\\ \frac{\partial g}{\partial x}\left((\sin(x))^2 y\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(x^3\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2y\sin(x)\cos(x)\end{pmatrix}.$$

(iii) Wir erhalten mit dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial W}\langle g,\mathrm{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma &= \int\limits_W \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)\\ &= \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi 3x^2+(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\cdot\int\limits_0^\pi 3x^2+(\sin(x))^2\,\mathrm{d}x\\ &= \pi^2\cdot\left[x^3+\frac{x}{2}-\frac{\cos(x)\sin(x)}{2}\right]_0^\pi = \pi^5+\frac{\pi^3}{2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(2+1+2=5 Punkte)*
Gegeben sei die ausgehöhlte Kugel

$$S := \left\{ (x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 \right\} .$$

(i) Geben Sie S in Kugelkoordinaten an.
Bestimmen Sie hierzu die Intervalle I_r, I_φ und I_θ so, dass

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \in I_r \;,\; \varphi \in I_\varphi \;,\; \theta \in I_\theta \right\}$$

gilt:

$$I_r = \boxed{[1, 2]} \quad , \quad I_\varphi = \boxed{[0, 2\pi]} \quad , \quad I_\theta = \boxed{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

(ii) Bestimmen Sie die Abstandsfunktion d, welche den Abstand eines Punkts zur z-Achse in Kugelkoordinaten beschreibt:

$$d(r, \varphi, \theta) = \boxed{r\cos(\theta)}$$

(iii) Die Dichte ρ der Kugel sei nun gegeben mittels $\rho(x, y, z) = 2$.
Bestimmen Sie im folgenden Ausdruck den Integranden so, dass besagter Ausdruck mit dem Trägheitsmoment von S bezüglich der z-Achse übereinstimmt:

$$\Theta = \int\limits_{I_r \times I_\varphi \times I_\theta} \boxed{2r^4 (\cos(\theta))^3} \, \mathrm{d}(r, \varphi, \theta)$$

Berechnen Sie ferner ebendieses Trägheitsmoment:

$$\Theta = \boxed{\frac{496}{15}\pi}$$

Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} |\cos(x)| \, \mathrm{d}x = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, \mathrm{d}x$.

Lösungsweg:

(i) Einsetzen der Kugelkoordinaten in die erste Ungleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sqrt{r^2 (\cos(\varphi))^2 (\cos(\theta))^2 + r^2 (\sin(\varphi))^2 (\cos(\theta))^2 + r^2 (\sin(\theta))^2} \\ &= \sqrt{r^2 (\cos(\theta))^2 + r^2 (\sin(\theta))^2} = r \leq 2 \,. \end{aligned}$$

(ii) Der Abstand eines Punktes $(x, y, z)^T$ zur z-Achse ist gegeben durch $\sqrt{x^2 + y^2}$. Wir erhalten also:

$$d(r, \varphi, \theta) = \sqrt{r^2 \left(\cos\left(\varphi\right)\right)^2 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^2 + r^2 \left(\sin\left(\varphi\right)\right)^2 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^2} = r \left|\cos(\theta)\right| .$$

(iii) Sei $\tilde{S} := I_r \times I_\varphi \times I_\theta$.
Das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse ist gegeben durch

$$\int\limits_S \rho(x, y, z)(\tilde{d}(x, y, z))^2 \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

mit Abstand $\tilde{d}$ zur entsprechenden Achse. Mit dem Transformationssatz erhalten wir entsprechend in Kugelkoordinaten:

$$\int\limits_S \rho(x, y, z)(\tilde{d}(x, y, z))^2 \, \mathrm{d}(x, y, z) = \int\limits_{\tilde{S}} 2(r\cos(\theta))^2 \cdot r^2 \cos(\theta) \, \mathrm{d}(r, \varphi, \theta) .$$

Wir erhalten hieraus mit (i) und (ii) und der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^4 \left(\cos\left(\theta\right)\right)^3 \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int\limits_1^2 2r^4 \, \mathrm{d}r \cdot \int\limits_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \left(1 - (\sin(\theta))^2\right) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{2}{5} r^5\right]_1^2 \cdot 2\pi \cdot \left[\sin(\theta) - \frac{1}{3} \left(\sin(\theta)\right)^3\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \underbrace{\left(\frac{2}{5} \left(32 - 1\right)\right)}_{=\frac{62}{5}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3})\right)}_{=\frac{4}{3}} \\
&= \frac{496\pi}{15} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*)
Die 2π-periodische, gerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch

$$f(t) := 2 + \frac{3\pi}{8} |\sin(t)| \cos(t)\,.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 und b_1 der zugehörigen Fourierreihe.

Lösungsweg: Aus Symmetriegründen ($f(t) = f(-t)$) gilt $b_1 = 0$.
Wir berechnen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(t) + \frac{3\pi}{8} |\sin(t)| (\cos(t))^2 \,\mathrm{d}t = \\ &= 0 + 2 \int_0^{\pi} \frac{3}{8} \sin(t)(\cos(t))^2 \,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Mittels der Substitution $x = \cos(t)$ – und somit $x'(t) = -\sin(t)$ – erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_1^{-1} -\frac{3}{4} x^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{4} x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1^3 - (-1)^3) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*1+2+4=7 Punkte*)
Gegeben sei der Parameter $\omega \in (0, \infty)$ sowie die Funktion

$$b_\omega\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \omega t\,.$$

(i) Begründen Sie, ob b_ω von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma > 0$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte

$$(\mathcal{L} b_\omega)(z)$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(iii) Lösen Sie mittels (ii) das folgende AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= b_\omega(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Hinweis: Greifen Sie auf die bekannten Rechenregeln und Beispiele aus dem Skript zurück.

Lösungsweg:

(i) Für $t \geq 0$ gilt:

$$|b_\omega(t)| = \left|\mathrm{e}^{-t}\omega t\right| \leq |\omega t| \ .$$

Da Polynome von exponentieller Ordnung für beliebiges $\gamma > 0$ sind, trifft dies auch auf b_ω zu.

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}b_\omega)(z) &= \omega(\mathcal{L}(t\mathrm{e}^{-t}))(z)\\ &= \omega(\mathcal{L}(t^1))(z+1)\\ &= \omega \cdot \frac{1}{(z+1)^2}\,.\end{aligned}$$

(iii) Wir erhalten mit (ii):

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{(z+1)^2} &= (\mathcal{L}b_\omega)(z) = (\mathcal{L}(y'+y))(z)\\ &= (\mathcal{L}y')(z) + (\mathcal{L}y)(z) = z(\mathcal{L}y)(z) - y(0) + (\mathcal{L}(y))(z)\,,\end{aligned}$$

woraus sich mit $y(0) = 0$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\omega}{(z+1)^3}$$

ergibt und somit

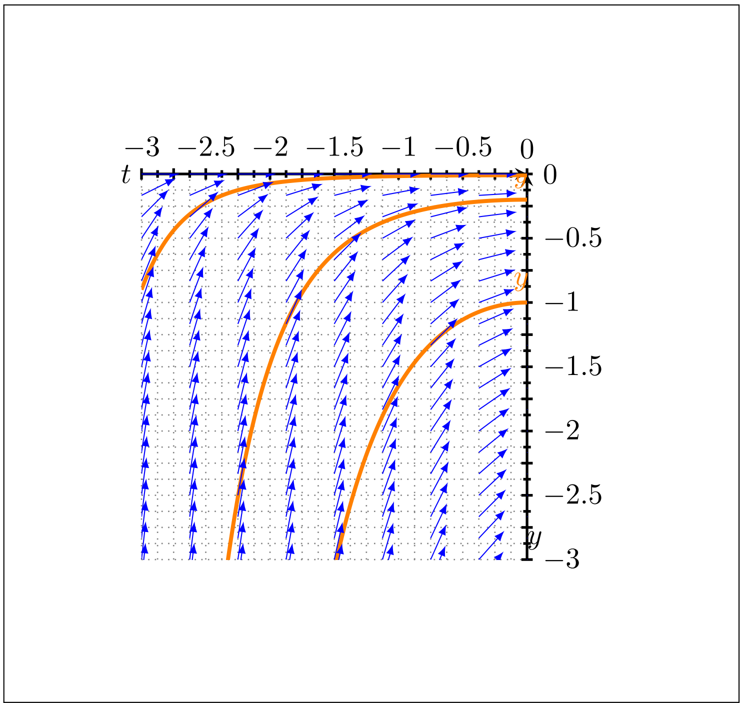
$$\begin{aligned}y(t) &= \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(z+1)^3}\right)\right)(t)\\ &= \mathrm{e}^{-t}\cdot\frac{\omega}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{z^3}\right)(t)\right)\\ &= \frac{\omega}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 *(2+2=4 Punkte)*

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = t \cdot y(t)$$

für $-3 \leq t \leq 0$ sowie $-3 \leq y \leq 0$ und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung. Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



y_1, y_2, y_3: Drei Beispiele für mögliche Lösungen.

(ii) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -4 + 2\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -4 - 2\mathrm{i}$ mit den jeweiligen Eigenvektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$:

$$\boxed{\left\{ e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right), e^{-4t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) \right\}}$$

Lösungsweg:

(i) Skizze des Richtungsfeldes mit möglichen Lösungen y_1, y_2, y_3: Siehe Abbildung. Wichtig: Da es $t{\cdot}y(t)$ ist, muss man einen Unterschied zwischen Pfeilen in der gleichen Zeile erkennen.

(ii) Ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems ist sofort gegeben durch Satz 17.3.4:

$$\left\{e^{-4t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos(2t)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin(2t)\right), e^{-4t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin(2t)+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos(2t)\right)\right\}.$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'\sin(t)-y\cos(t)=\sin^3(t),\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Lösungsweg:
Zuerst wird die homogene DGL durch Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned}&y'\sin(t)-y\cos(t)=0\Rightarrow y'\sin(t)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin(t)=y\cos(t)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t\\&\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t\Rightarrow\ln|y|=\ln|\sin(t)|+\ln|C|=\ln|C\sin(t)|\\&\Rightarrow y=\pm C\sin(t)=K\sin(t).\end{aligned}$$

Variation der Konstanten: $K=K(t)$ setzen und ableiten ergibt:

$$K'(t)\sin(t)+\cos(t)K(t).$$

Für die DGL ergibt sich somit

$$\begin{aligned}y'=K'(t)\sin(t)+\cos(t)K(t)&\Rightarrow(K'(t)\sin(t)+\cos(t)K(t))\sin(t)-K(t)\sin(t)\cos(t)=\sin^3(t)\\&\Rightarrow K'(t)\sin^2(t)=\sin^3(t)\Rightarrow K'(t)=\sin(t)\\&\Rightarrow K(t)=\int\sin(t)\mathrm{d}t=-\cos(t)+C\\&\Rightarrow y=(-\cos(t)+C)\sin(t).\end{aligned}$$

Anfangsbedingung liefert $C=2$.
Es ist zu beachten, dass das Teilen durch $\sin(t)$ erlaubt ist, da $\sin(t)=0$ nur an einzelnen Stellen – d.h. für eine diskrete, nicht-dichte Teilmenge – gilt und die Integration für die dazwischenliegenden Intervalle sinnvoll durchgeführt werden kann.

Aufgabe 7 *(1+1+1+3+1=7 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = y_1 + y_2 + \mathrm{e}^t, \quad y_2' = y_2. \tag{1}$$

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

Weil (1) von der Form $y' = f(t, y)$ ist und $t \mapsto f(t, y) := Ay + b(t)$ nicht konstant ist für ein (alle) $y \in \mathbb{R}^2$, ist (1) nicht autonom.

(iii) Ist das homogene System $y' = Ay$ stabil?

Nein, da beide Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ keine negativen Realteile besitzen.

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zum System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (1, 1)^{\mathrm{T}}$.

$$y(t) = e^t \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg:

(iii) Die Eigenwerte berechnen oder ablesen. Die Eigenwerte sind $\lambda_{1/2} = 1$.

(iv) Berechnung über Fall c) aus der Vorlesung. Doppelter EW mit EV sind

$$\lambda_{1/2} = 1, \quad v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun brauchen wir noch den Nebenvektor w:

$$(A - \lambda I)w = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $d = 1$ und c beliebig, wir wählen $c = 0$. Einsetzen in Formel liefert

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(v) Aufgrund von Korollar 17.3.14 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (1, 1)^\top$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{At} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} b(s) \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)e^t \\ e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (*1+2+1=4 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mittels

$$f(x+\mathrm{i}y) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^3 - y - xy\,\mathrm{i}\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Bestimmen Sie:

$$\partial_x\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{x^3} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{y^2-1}$$

$$\partial_x\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{-y} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{-x}$$

(ii) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar in z?

$$z \in \boxed{\left\{\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}\,,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{i}\right\}}$$

(iii) Sei C die durch $z\colon [0,1] \to \mathbb{C}\,,\ t \mapsto -\mathrm{i}t$ parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie:

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \boxed{-\frac{5}{12}\mathrm{i}}$$

Lösungsweg:

(ii) Zuerst bemerken wir, dass $\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y)) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^3 - y$ und $\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y)) = -xy$ reell differenzierbar sind für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Die CR-Differentialgleichungen – $\partial_x\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \partial_y\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right)$ und $\partial_y\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = -\partial_x\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right)$ – implizieren nun:

$$\begin{aligned} x^3 &= -x \\ -y^2 + 1 &= -y\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile und der Tatsache $x \in \mathbb{R}$ folgt $x = 0$. Die zweite Zeile liefert nun die Gleichung

$$y^2 - y - 1 = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

(iii) Mit

$$f(-\mathrm{i}t) = -\frac{1}{3}t^3 + t$$

und $z'(t) = -\mathrm{i}$ folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int\limits_0^1 f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t = (-\mathrm{i})\int\limits_0^1 -\frac{1}{3}t^3 + t\,\mathrm{d}t \\ = \mathrm{i}\left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \\ = \mathrm{i}\cdot\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{12}\mathrm{i}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (*2+2=4 Punkte*)

(i) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{z^2}{z^2+1}\mathrm{d}z\,.$$

Denken Sie bei Verwendung von Sätzen oder Formeln an das Überprüfen aller Voraussetzungen!

(ii) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf dem Kreis $|z| = 2$ mit $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$g(z) = (z-1)^2, \quad \text{für } |z| = 2.$$

Berechnen Sie den Wert $g''(1)$.

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy'sche Integralformel ohne Prüfung der Voraussetzungen anwenden.

Lösungsweg:

(i) Auf den ersten Blick passt die Cauchy'sche Integralformel, daher überprüfen wir die Voraussetzungen:

Wir wählen ein passendes Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\mathrm{i}| < 1.5\}.$$

Die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}$$

ist holomorph auf diesem Gebiet, D ist offen und der abgeschlossene Ball mit Radius 1 und Mittelpunkt $z_0 = \mathrm{i}$ liegt in D.

Daher dürfen wir CIF anwenden:

$$\int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{z^2}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{z^2}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z = \int_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = -\pi.$$

Alternativer Lösungsweg:(für die Voraussetzungen von CIF)

Allgmeine Version: Wir wählen D und f wie oben. D ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und C (Kreis mit Radius 1) ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg in D, der den Punkt $z_0 = \mathrm{i}$ umschließt.

Alternativer Lösungsweg: Alternativ kann man den Residuensatz anwenden. Dafür müssen aber auch die Voraussetzungen des Satzes kontrolliert werden: Wir wählen wieder ein Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 10\}.$$

Die zu integrierende Funktion

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{z+\mathrm{i}}\right)$$

ist gebrochen rational: Zähler und Nenner sind Polynomfunktionen. Daher ist die Funktion holomorph auf D bis auf endlich viele Punkte.
Der Kreis mit Radius 1 um i liegt in D und ist eine glatte, geschlossene Kurve, welche zusätzlich doppelpunktfrei und so parametrisiert werden kann, dass das umschlossene Gebiet links zur Durchlaufrichtung liegt.

Man darf demnach den Residuensatz anwenden.

Da $z_0 = -\mathrm{i}$ nicht im umschlossenen Gebiet des Kreises liegt, kann dieses Residuum ignoriert werden. Für $z_1 = \mathrm{i}$ ergibt sich das folgende Reisduum:

$$\operatorname{res}(f; z_1) = \frac{\mathrm{i}}{2}.$$

Fügt man dieses Residuum in die Formel des Residuensatzes, folgt das Ergebnis wie oben.

(ii) Nach der erweiterten Cauchy'sche Integralformel (Bemerkung zu Satz 5.28) gilt

$$\begin{aligned} g''(1) &= \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_2(0)} \frac{g(z)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_2(0)} \frac{(z-1)^2}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(z-1)}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{i}} 2\pi\imath \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-1}, 1\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 10 (*1+2=3 Punkte*)
Im Folgenden bezeichne ln wie üblich den Hauptzweig des Logarithmus.

(i) Geben Sie $\ln(1-\mathrm{i})$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\ln(1-\mathrm{i}) = \boxed{\ln\left(\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{4} \cdot \mathrm{i}}$$

(ii) Gegeben sei nun die auf der Kreisscheibe

$$U := B_2(4+2\mathrm{i}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-4-2\mathrm{i}| < 2 \right\}$$

konvergente Potenzreihe

$$L(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{5n} (z-4-2\mathrm{i})^{5n} \; .$$

a) Bestimmen Sie $L'(z)$ für $z \in U$:

$$L'(z) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 5 \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{5n} (z-4-2\mathrm{i})^{5n-1}}$$

b) Sei $z_1 = 6+2\mathrm{i}$. Geben Sie mithilfe der Taylorreihenentwicklung

$$\ln(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$$

einen geschlossenen Ausdruck für den Wert $L(z_1)$ der Reihe an der Stelle z_1 an:

$$L(z_1) = \boxed{-\ln(1-\mathrm{i})}$$

Lösungsweg:

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} \ln(1-\mathrm{i}) &= \ln\left(|1-\mathrm{i}|\right) + \arg\left(1-\mathrm{i}\right) \cdot \mathrm{i} \\ &= \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}\mathrm{i} \, . \end{aligned}$$

(ii) a) Folgt durch gliedweise Differentiation.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{5n} (z_1-4-2\mathrm{i})^{5n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{4n+n} (2)^{5n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{(\mathrm{i})^{4n}}_{=1} \cdot \mathrm{i}^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mathrm{i}^n = -\ln(1-\mathrm{i}) \, . \end{aligned}$$

Aufgabe 11 (*3+1=4 Punkte*)

(i) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{4\mathrm{e}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+1)^2}\,.$$

Bestimmen Sie die Residuen $\operatorname{res}(f,\mathrm{i}), \operatorname{res}(f,-1)$ und $\operatorname{res}(f,0)$.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{|z-(-1+\mathrm{i})|=2} f(z)\mathrm{d}z$$

mit der Funktion f aus Teilaufgabe (i).

Lösungsweg:

(i) Wir betrachten die drei gebenen Residuen:

$z_0 = \mathrm{i}$: Pol (erster Ordnung) Wir berechnen das Residuum mit Satz 18.6.6 (i):

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{4\mathrm{e}}{(z+\mathrm{i})(z+1)^2} = \frac{2\mathrm{e}}{\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)^2} = -\mathrm{e}.$$

$z_0 = -1$: Pol (zweiter Ordnung), Wir berechnen das Residuum für -1 mit Satz 18.6.6 (ii):

$$h(z) = \frac{4\mathrm{e}}{z^2+1},$$
$$h'(z) = \frac{-8\mathrm{e}z}{(z^2+1)^2}.$$

Damit ist das Residuum

$$\operatorname{res}(f;-1) = 2\mathrm{e}.$$

$z_0 = 0$: keine Singularität, daher ist das Residuum 0.

(ii) In dem angegebenen Kreis liegen die Singularitäten i und -1. Die Singularität $-\mathrm{i}$ liegt nicht in dem Kreis $|z-(-1+\mathrm{i})| = 2$.

Mit dem Residuensatz und (i) folgt:

$$\int_{|z-(-1+\mathrm{i})|=2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{e}+2\mathrm{e}) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}.$$

Voraussetzungen des Residuensatzes:

Wir wählen ein Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-(-1+\mathrm{i})| < 2.1\}.$$

Die zu integrierende Funktion

$$f(z) = \left(\frac{4\mathrm{e}}{(z^2+1)(z+1)^2}\right)$$

ist Quotient aus einer konstanten Funktion sowie einer Polynomfunktion. Daher ist die Funktion holomorph auf D bis auf endlich viele Punkte. Der Kreis mit Radius 2 um den Punkt $-1+\mathrm{i}$ liegt in D und ist eine glatte, geschlossene Kurve, welche zusätzlich doppelpunktfrei und so parametrisiert werden kann, dass das umschlossene Gebiet links zur Durchlaufrichtung liegt.

Aufgabe 12 (*5 Punkte*)
Berechnen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{x^2+4} \sin(\omega x) \mathrm{d}x \qquad \text{für } \omega > 0.$$

Denken Sie bei Verwendung von Sätzen oder Formeln an das Überprüfen aller Voraussetzungen!

Lösungsweg:
Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{x^2+4} \sin(\omega x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} \sin(-\omega x) \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x\right).$$

Nun wollen wir Satz 18.7.3. anwenden und überprüfen die Voraussetzungen. Dazu sei also

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$$

sowie

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x.$$

Die Voraussetzungen sind:

- f holomorph auf $\mathbb{C}$ bis auf isolierte Singularitäten $z_i \notin \mathbb{R}$.
- $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

Nun überprüfen wir diese:

- Die Funktion

  $$f(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$$

  ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$, $\pm 2\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$

- Wir schätzen den Nenner nach unten ab mit $|z^2| < |z^2+4|$. Damit gilt

  $$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{z^2+4}\right| < \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{z^2}\right| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^2} = 0$$

  Dadurch gilt $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

Für $\omega > 0$: Nur $-2\mathrm{i}$ ist Pol in der unteren Halbebene.

$$\mathrm{res}\left(f(z)e^{-\mathrm{i}\omega z}, -2\mathrm{i}\right) \overset{\text{RR i)}}{=} \left.\frac{1}{z-2\mathrm{i}} e^{-\mathrm{i}\omega z}\right|_{z=-2\mathrm{i}} = \frac{-1}{4\mathrm{i}} e^{-2\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \overset{\text{Satz 18.7.3}}{=} -2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{-4\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\omega 2} = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-2\omega} \text{ für } \omega > 0.$$

Insgesamt ist das Ergebnis des Integrals demnach 0, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{x^2+4} \sin(\omega x) \mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-2\omega}\right) = 0.$$
