Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

1. September 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I - III

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 180 min.

Zu bearbeiten sind alle zehn Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Anfang Oktober im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 19. Oktober 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

Es seien die beiden Transformationen $T_1 : (y_1, y_2, y_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ und $T_2 : (z_1, z_2, z_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$ mit

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ x_2 &= y_1 - 4y_2 + 5y_3 \\ x_3 &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3z_1 + 2z_2 + 2z_3 \\ y_2 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ y_3 &= z_1 + z_2 + 2z_3 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie (x_1, x_2, x_3) in Abhängigkeit von (z_1, z_2, z_3).

b) Drücken Sie (z_1, z_2, z_3) in Abhängigkeit von (y_1, y_2, y_3) aus.

c) Läßt sich (z_1, z_2, z_3) auch in Abhängigkeit von (x_1, x_2, x_3) ausdrücken? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Es sei

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x$.

Aufgabe 3

Man berechne die Integrale

a)

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

b)

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$$

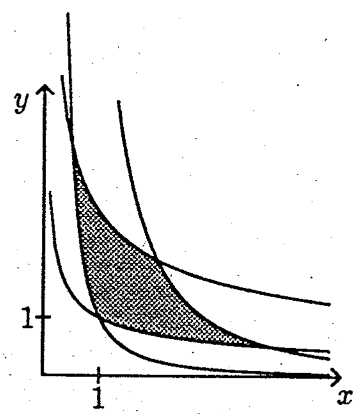
Aufgabe 4

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi : \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p\,e^{q} \\ p\,e^{-2q} \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 y \leq 8\,,\, 1 \leq xy^2 \leq 8\}\,.$$



a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation Φ.

b) Beschreiben Sie die Fläche F in pq - Koordinaten und skizzieren Sie F in der pq-Ebene.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x$.

a) Bestimmen Sie alle Punkte (x,y) mit $f(x,y) = 0$ und skizzieren Sie die Gebiete mit $f > 0$ und $f < 0$.

b) Geben Sie alle kritischen Punkte von f an.

c) Welche dieser kritischen Punkte sind Minima? (Die Begründung kann geometrisch oder analytisch erfolgen).

Aufgabe 6

Für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sei ein Vektorfeld der folgenden Form gegeben:

$$v(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \; f(1) = 1$$

a) Bestimmen Sie die skalare Funktion f so, daß das Vektorfeld v divergenzfrei ist.

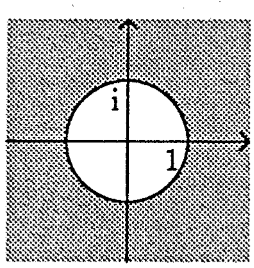
b) Bestimmen Sie für diese Funktion f den Fluß von v von innen nach außen für folgende Kugeln:

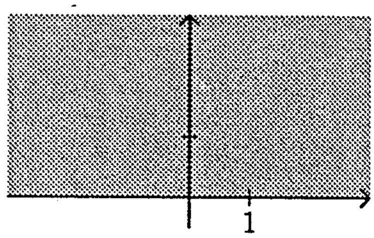
- $K_1 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- $K_2 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

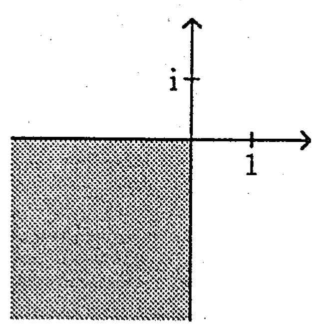
Hinweis: Beachten Sie, daß das Vektorfeld v im Ursprung nicht definiert ist.

Aufgabe 7

Gegeben seien die drei Gebiete in der komplexen Zahlenebene:







$\Omega_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$ $\qquad$ $\Omega_2 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ $\qquad$ $\Omega_3 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z < 0, \mathrm{Im}\, z < 0\}$

Bestimmen Sie konforme Abbildungen f_1, f_2, für welche gilt:

a) $f_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit $0 \to -\mathrm{i}$ und $1 \to \infty$.

b) $f_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ mit $\mathrm{i} \to -1 - \mathrm{i}$.

Aufgabe 8

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion

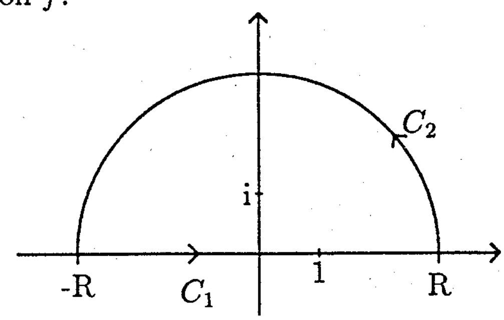
$$f(x) := \exp(x) \quad \text{für} \quad 0 < x \leq 2\pi \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \; .$$

a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

Aufgabe 9

Es seien C_1 und C_2 die nebenstehend skizzierten Kurven.



a) Welche Singularitäten besitzt die Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(iz)}{(z^2+1)(z-i)}$$

in der oberen Halbebene? Bestimmen Sie die Residuen von f an diesen Stellen.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{C_1+C_2} f(z)dz$ für $R \geq 1000$.

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil b) das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x + \cos x}{(x^2+1)^2} \, dx \; .$$

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis):

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$$

Aufgabe 10

a) Gegeben sei das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Geben Sie eine Parametrisierung der Dreiecksfläche in der Form $z = f(x,y)$ an und bestimmen Sie einen Normalenvektor.

b) Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds $v = (\sin(x^2), xy, zy)^T$.

c) Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$W := \int_{\partial\Delta} v$$

des Vektorfelds v entlang der Randkurve $\partial\Delta$ des Dreiecks. Die Orientierung der Randkurve sei dabei so gewählt, daß die Eckpunkte in der angegeben Reihenfolge durchlaufen werden.