

Klausur zur Höheren Mathematik 1

für Ingenieurstudiengänge

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 6 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 07.04.2026 über das C@MPUS-Portal (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen am **13.04.2026** in der Sprechstunde von Prof. Stroppel (Raum 7.323) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ \frac{1}{3}(a_{n-1} + 4) & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Zeigen Sie induktiv, dass $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit.
- (b) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ 6x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ 18x_1 + 3x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_E \alpha_E$ von α bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.
- (b) Berechnen Sie den Rang der Matrix ${}_E \alpha_E$.
- (c) Untersuchen Sie die Abbildung α auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\mathcal{L} := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\}$ und $\mathcal{L}_H := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$.
- (b) Liegt der Vektor $v = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\top$ in der Lösungsmenge $\mathcal{L}_H$?

Aufgabe 5 (7 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 + 4 = 0 \right\}.$$

- (a) Bringen Sie Q in die Form $x^\top Ax + 2a^\top x + c = 0$ mit einer symmetrischen Matrix A . Bestimmen Sie anschließend die Eigenwerte sowie jeweils einen zugehörigen Eigenvektor von A .
- (b) Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q und geben Sie die Gestalt der Quadrik an.

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

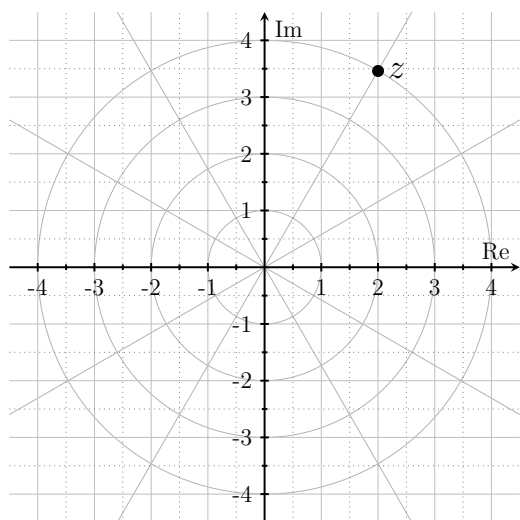
gang:

Aufgabe 6 (4 Punkte)

(a) Sei $z = \frac{1+5i}{3+2i}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z| =$ von z sowie das Argument

$\varphi = \arg(z^9) =$ von z^9 unter der Bedingung $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(b) Sei z die unten grafisch dargestellte komplexe Zahl mit $\operatorname{Re}(z) = 2$ und $|z| = 4$. Skizzieren Sie die Lösungsmenge $W = \{w \in \mathbb{C} \mid w^2 = z\}$ in die vorgegebene Ebene ein.



Aufgabe 7 (3 Punkte) Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem mit $L(v_1) = L(w_1)$, $L(v_1, v_2) = L(w_1, w_2)$ und $L(v_1, v_2, v_3) = L(w_1, w_2, w_3)$.

 $w_1 =$

 $w_2 =$

 $w_3 =$

Aufgabe 8 (6 Punkte) Berechnen Sie:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \boxed{} & \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} = \boxed{} \\
 \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n^2} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) = \boxed{} & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 5n} - \sqrt{n^2 + 2n} = \boxed{} \\
 \text{(e)} \sum_{n=3}^9 \frac{3}{(n-1)n} - \frac{3}{n(n+1)} = \boxed{} & \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^7} = \boxed{}
 \end{array}$$

Aufgabe 9 (4 Punkte) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 2i & -1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den größten Eigenwert λ der Matrix A : $\lambda = \boxed{}$
- (b) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A : $A^{-1} = \boxed{}$
- (c) Finden Sie ein $\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $\text{Sp}(B_{\alpha}) = 4$ gilt: $\alpha = \boxed{}$
- (d) Berechnen Sie $\det(B_2) = \boxed{}$

Aufgabe 10 (3 Punkte) Gegeben seien die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$ und die Basis $B : b_1, b_2, b_3$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin sei die lineare Abbildung α gegeben durch

$$\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}_E \text{id}_B$ und ${}_B \text{id}_E$, sowie die Darstellungsmatrix ${}_E \alpha_B$:

$${}_E \text{id}_B = \boxed{} \quad {}_B \text{id}_E = \boxed{} \quad {}_E \alpha_B = \boxed{}$$