

Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für Ingenieurstudiengänge

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 07.04.2026 über das C@MPUS-Portal (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen am **13.04.2026** in der Sprechstunde von Prof. Stroppel (Raum 7.323) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$\mathcal{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 8\sqrt{5}x_1 - 4\sqrt{5}x_2 + 49 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform und die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2 e^{-x}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f .

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (x^2 - 2kx + (k-1)k) e^{-x}.$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt der Graph von $f^{(k)}$ an der Stelle $x = 6$ eine waagrechte Tangente?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $f\left(\begin{pmatrix} 17 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E}_3$ von $\mathbb{R}^3$.

(c) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4 (7 Punkte) Bestimmen Sie diejenigen Stellen in der kompakten Menge

$$M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 2\},$$

an denen die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto (2x + y)^2$ ihren kleinsten bzw. ihren größten Wert annimmt.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x}$.
- (b) Berechnen Sie $\int \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x} dx$.
- (c) Gegeben sei $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\ln(x^5)}{\sqrt{x^3}}$. Berechnen Sie $\int f(x) dx$.
-

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y)^\top \mapsto e^{2x+y}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Punkt $(0, 0)^\top$.

Aufgabe 7 (3 Punkte) Gegeben sei das konservative Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x)y + 1 \\ -\cos(x) + 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie eine Potentialfunktion.
- (b) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.
-

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 8 (6 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A .Rg $A =$ (b) A hat den Eigenwert 0. Berechnen Sie dessen geometrische Vielfachheit. $d_0 =$ (c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.(d) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T so, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. $T =$ **Aufgabe 9** (2 Punkte) Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix B .

Eigenwert	Eigenvektor

Aufgabe 10 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-9} = \boxed{} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n} + \frac{3^n}{n}} = \boxed{}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 2x \sin(x^5)}{(2x - 5)^2} = \boxed{} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2}{5^k} = \boxed{}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Geben Sie für jede der folgenden komplexen Potenzreihen den Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und den Radius $\rho \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ ihres Konvergenzkreises an:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} (3z - 3)^n, \quad z_0 = \boxed{}, \quad \rho = \boxed{}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} (1 - i)^{2n} (z + i)^{2n}, \quad z_0 = \boxed{}, \quad \rho = \boxed{}$$

Aufgabe 12 (6 Punkte)

(a) Zeichnen Sie $z_1 = \frac{-10}{1 + 2i}$, $z_2 = \frac{1}{2}(i - 1)$ und $z_3 = \frac{1}{2}(1 - i)^7$ in die komplexe Zahlenebene ein.

(b) Skizzieren Sie die Mengen

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z + 2i) \leq 3 \right\} \text{ und } M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z - 3 - i| \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z + 2i) \leq 3 \right\}.$$

