

Modulprüfung (Module 41990 und 107730)
11.03.2026

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner, Handys oder Smartwatches erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unzulässig und werden ggfs. nicht berücksichtigt.
- Es gibt insgesamt **9 Aufgaben**.
- Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworten müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und kennzeichnen Sie die Aufgabenteile klar.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte). Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$$

- (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt.
- (c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems mit Hilfe des gaußschen Eliminationsverfahrens.
- (d) Bestimmen Sie den Rang von A .

Aufgabe 2 (1 + 2 + 1 + 1 Punkte). Betrachten Sie die folgende Funktion, die von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(2x)}{x} & \text{für } x < 0, \\ 1 - \exp(a - x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie $f(-\pi)$ und $f(a)$ für $a > 0$.
- (b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

- (c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.
- (d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 3 (1 + 1 Punkte). Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

(b) $\int_0^1 x e^x dx$

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 + 1 Punkte). Ein Unternehmen analysiert die Preiselastizität der Nachfrage für eines seiner Produkte. Die Nachfragefunktion ist gegeben durch:

$$N(p) = 120 - 3p, \quad p \geq 0,$$

wobei $N(p)$ die nachgefragte Menge (in kg) und p der Preis (in Euro) sind.

- (a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich der Nachfragefunktion $N(p)$, unter Berücksichtigung der Bedingungen, dass sowohl der Preis als auch die nachgefragte Menge nicht negativ sein dürfen.
- (b) Bestimmen Sie die Wachstumsrate und die Elastizität der Nachfrage.
- (c) Prüfen Sie, ob die Nachfrage bei $p = 12$ bzw. $p = 32$ elastisch oder unelastisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $P(N)$, das heißt die Umkehrfunktion von $N(p)$.

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 + 1 + 1). Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz, bestimmen Sie den jeweiligen (uneigentlichen) Grenzwert.

(a) $\frac{15n^8 - n^2}{5n^8 + 3n + 1}$

(c) $3 \arctan(n) + n \ln \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

(d) $(-1)^{n(n-1)}$

(b) $\frac{9n^6 + \sin(3n)}{n^4 + 8 \cos(n^3)}$

(e) $\frac{6n^4 - 4n}{2n^5 + 1}$

Aufgabe 6 (1 + 1 + 1 + 2 Punkte). (a) Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = 24x - 3xy^2 - x^4.$$

Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.

(b) Gegeben sei der Gradient einer Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 8x - 4y \\ -4x + 6y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $Hg(x, y)$.

(c) Gegeben sei der Gradient einer Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 - 18 \\ 6y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von h .

(d) Gegeben sei eine Funktion $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Hesse-Matrix

$$Hk(x, y) = \begin{pmatrix} x - 1 & 0 \\ 0 & -y - 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei bekannt, dass die Punkte

$$(0, 0), \quad (0, -2), \quad (2, 0), \quad (2, -2)$$

kritische Punkte von k sind.

Untersuchen Sie diese Punkte hinsichtlich ihres Charakters (lokale Minimalstelle, lokale Maximalstelle oder Sattelpunkt). Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 (1 + 1 + 1 + 2 Punkte). Gegeben sind die folgenden Nachfrage- und Angebotsfunktionen:

$$D(p) = 40 - p, \quad S(p) = p,$$

wobei $D(p)$ die nachgefragte Menge, $S(p)$ die angebotene Menge und p der Preis sind.

- (a) Berechnen Sie die Grenznachfragefunktion d.h. $D'(p)$.
- (b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis p^* , d.h. der Preis p^* bei dem sich Nachfrage und Angebot ausgleichen: $D(p^*) = S(p^*)$.
- (c) Berechnen Sie die entsprechende Gleichgewichtsmenge q^* , gegeben durch $q^* = D(p^*)$.
- (d) Ermitteln Sie die Konsumentenrente. *Für diesen Aufgabenteil gelten die folgenden Daten (unabhängig von (a)–(c)):*

Die Nachfrage- und Angebotsfunktion seien gegeben durch

$$D(p) = 60 - 2p, \quad S(p) = 2p.$$

Der Gleichgewichtspreis beträgt $p^* = 15$ und die Gleichgewichtsmenge beträgt $q^* = 30$.

Berechnen Sie die Konsumentenrente mit

$$\text{Konsumentenrente} = \int_0^{p^*} D(p) \, dp - p^* \cdot q^*.$$

Aufgabe 8 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte). Betrachten Sie die Funktion

$$g: [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -x^3 + 12x.$$

- (a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.
- (b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g .
- (c) Bestimmen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g .
- (d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g .

Aufgabe 9 (1 + 1 + 1 Punkte). Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (a) Berechnen Sie das Matrixprodukt $A \cdot B$.
- (b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.
- (c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$