

Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2026** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (2+3+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
 - (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?
 - (c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'' - 8y' + 16y = 6(x - 1)e^{4x}$ mit den Anfangswerten $y(0) = 3$, $y'(0) = 6$.
-

Aufgabe 2 (2+6 = 8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gerade 2π -periodische Funktion, die für $0 \leq x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ (x - \frac{\pi}{2})^2 & \text{falls } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$. Verwenden Sie hierbei die Näherung $\frac{\pi^2}{4} \approx 2,5$.
 - (b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.
-

Aufgabe 3 (2+1+1 = 4 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + y' + \frac{5}{4}y = 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung dieses Anfangswertproblems.

Wir schreiben $g(t) := 2e^{-\frac{1}{2}t}$. Sei $p(X)$ das charakteristische Polynom von $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$.

- (a) Bestimmen Sie $U(s) = \frac{1}{p(s)}$. Führen Sie eine quadratische Ergänzung des Nenners durch.
Bestimmen Sie damit $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$.
 - (b) Bestimmen Sie $f(t)$ als Faltung: $f(t) = u(t) * g(t)$.
 - (c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus (b) durch Einsetzen in die betrachtete Differentialgleichung.
-

Aufgabe 4 (1+1+3+1 = 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $3i$.

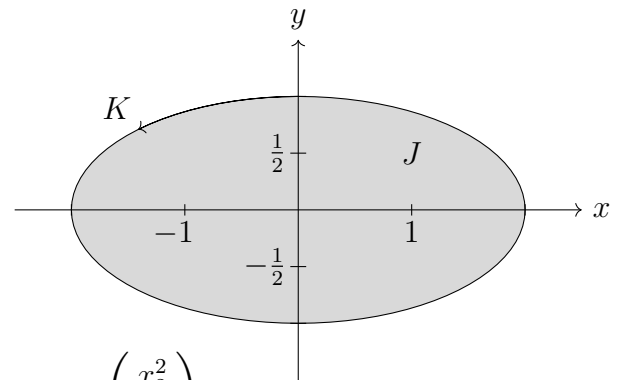
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
- Geben Sie die Wronski-Matrix $W_{\text{sys}}(x)$ an und bestimmen Sie die Inverse $W_{\text{sys}}(x)^{-1}$.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y' = Ay + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Bestimmen Sie alle Lösungen von $y' = Ay + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5 (2+2 = 4 Punkte)

Wir betrachten das rechts dargestellte Gebiet J und die geschlossene Kurve K , die J berandet.

Es wird K parametrisiert durch

$$C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$



Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto g(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie den Ausfluss $A(g, K)$ als Kurvenintegral.
- Berechnen Sie $\text{div}(g)$. Bestätigen Sie hiermit das Ergebnis aus (a).

Aufgabe 6 (2+3 = 5 Punkte)

Sei $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \psi(u, v, \varphi) := \begin{pmatrix} u \cos(\varphi) \\ u \sin(\varphi) \\ uv \end{pmatrix}$.

Sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \mid 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

Sei $D := \psi(B) \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Berechnen Sie $|\det(J\psi(u, v, \varphi))|$.
- Berechnen Sie

$$\iiint_D 4x + 4z \, dx \, dy \, dz$$

unter Verwendung von ψ und der Transformationsformel.

Name,
Vorname:

Matrikel-
nummer:

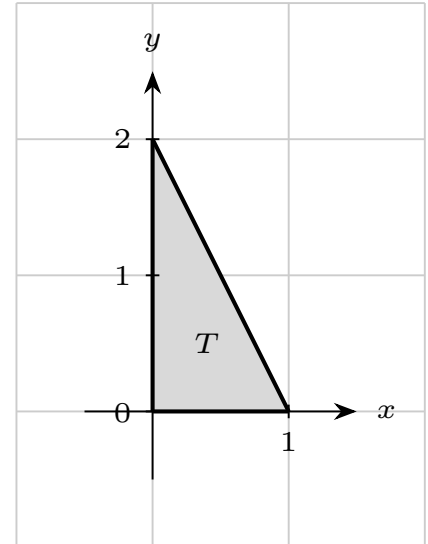
Aufgabe 7 (1+1+1 = 3 Punkte) Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ wie in der Skizze rechts dargestellt.

(a) Stellen Sie T als Normalbereich bezüglich der x -Achse dar.

$T =$

(b) Stellen Sie T als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar.

$T =$



(c) Berechnen Sie

$$\iint_T 2 + 2x \, dx \, dy =$$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie $c > 0$ und Funktionen f, g so, dass das Anfangswertproblem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

die Lösung

$$u(x, t) = \frac{x}{2} + \frac{1}{6} (\cos(x + 3t) - \cos(x - 3t))$$

hat.

$f(x) =$

$g(x) =$

$c =$