

Klausur Mathematik für Informatikstudiengänge 1 im WiSe 2024/2025

PD. Dr. A. Degeratu, Dr. E. Chavli, M.Sc. O.König

09.09.2025

LÖSUNGEN

- Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!
- Erlaubte Hilfsmittel sind:
Vier eigenhändig handbeschriebene doppelseitige DIN A4 Blätter.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Bestimmen Sie $r \in \{0, 1, \dots, 10\}$ mit $3^{2025} \equiv r \pmod{11}$.
- (b) Bestimmen Sie $d := \text{ggT}(42, 66)$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = 42a + 66b$.
- (c) Bestimmen Sie die Zahl n mit 4-adischer Entwicklung 133221_4 .

Lösung.

- (a) Es gilt $2025 = 5^2 \times 3^4$ und $3^5 = 243 = 11 \times 22 + 1$, also

$$3^{2025} \equiv_{11} 243^{5 \times 3^4} \equiv_{11} 1^{5 \times 3^4} = 1.$$

Das richtige r ist deshalb $r = 1$.

- (b) Mit dem euklidischen Algorithmus erhalten wir

$$66 = 42 + 24$$

$$42 = 24 + 18$$

$$24 = 18 + 6$$

$$18 = 3 \times 6$$

und deswegen $d = 6$. Diese Rechnung liefert

$$6 = 24 - 18 = 2 \times 24 - 42 = 2 \times 66 - 3 \times 42$$

also $a = -3$ und $b = 2$.

- (c) Es gilt

$$\begin{aligned} n &= 1 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^4 + 1 \times 4^5 \\ &= 1 + 2 + 2 \times 16 + 3 \times 64 + 3 \times 256 + 1 \times 1024 \\ &= 2025. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (9=3+3+3 Punkte) Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

- (a) Sei $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ der Körper mit 7 Elementen. Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f = X^3 + \bar{5}X^2 + \bar{6}X + \bar{2} \in K[X]$.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|1 - 2x| \leq 9$.
- (c) Gegeben seien $z := 2 - i \in \mathbb{C}$ und $w := 3 + 2i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie jeweils $2z \cdot w$ und $5z^{-1} + w$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung.

- (a) Nullstellen: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}$.
- (b) $|1 - 2x| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq 1 - 2x \leq 9 \Rightarrow -10 \leq -2x \leq 8 \Rightarrow -4 \leq x \leq 5$, also $x \in [-4, 5]$.
- (c) $2z \cdot w = (4 - 2i)(3 + 2i) = 12 + 8i - 6i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$.
 $5z^{-1} + w = \frac{5}{2 - i} + 3 + 2i = \frac{5(2 + i)}{(2 + i)(2 - i)} + 3 + 2i = \frac{5(2 + i)}{5} + 3 + 2i = 5 + 3i$.

Aufgabe 3. (10=4+3+3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit 5 Elementen. Für $t \in K$ betrachte die Matrix

$$A_t := \begin{bmatrix} t+2 & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{2}t & t+\bar{1} \end{bmatrix} \in M_3(K).$$

- Berechnen Sie $\det(A_t)$ und zeigen Sie, dass die Determinante für $t = \bar{2}$ Null ist.
- Zeigen Sie, dass $A_{\bar{1}}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie $A_{\bar{1}}^{-1} \in M_3(K)$.
- Bestimmen Sie alle $t \in K$, für die A_t invertierbar ist.

Lösung.

- Es gilt

$$\det(A_t) = (t+2) \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2t & t+1 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = (t+2)(4t+4-6t) + 3 \times (-5) = -2t^2 - 7 = 3(t^2 + 1).$$

3 Punkte. 1 Punkt wenn man versucht, aber falsch.

Direkte Rechnung zeigt

$$\det(A_2) = 3(4+1) = 15 = 0.$$

in diesem Körper K .

1 Punkt; kein FolgeFehler wenn $\det(A_2) \neq 0$.

- Es gilt $\det(A_1) = 6 \neq 0$ in K und deshalb ist A_1 invertierbar.

1 Punkt

Mit dem Gauß-Verfahren erhalten wir

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ &\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Deswegen ist die Inverse durch

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

2 Punkte; 1 Punkt wenn Fehler bei Gauß-Verfahren.

- Über K gilt $\det(A_t) = 3(t^2 + 1) = 3(t-2)(t-3)$.

1 Punkt

Es gilt also $\det(A_t) = 0$ genau dann, wenn $t \in \{2, 3\}$.

1 Punkt

Die Matrix ist deswegen für alle $t \neq 2, 3$ invertierbar und ist für $t \in \{2, 3\}$ nicht invertierbar.

1 Punkt

Aufgabe 4. (8=4+4 Punkte) Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 5} \text{ und } b = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = b\}$.
 (b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums $L_0 = \{x \in \mathbb{Q}^5 \mid A \cdot x = 0_3\}$.

Lösung.

- (a) Mit dem Gauß-Verfahren erhalten wir

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Deshalb, $L = \{(1 + s, s, -1 + t, t, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

- (b) $L_0 = \{(s, s, t, t, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Eine Basis ist $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

2 Punkte.

2 Punkte.

2 Punkte.

2 Punkte.

Aufgabe 5. (12=2+4+2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$ sowie die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Q}^3.$$

- Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- Bestimmen Sie das Charakteristische Polynom χ_A und die Eigenwerte von A .
- Ist die Menge $\{v_3, v_4\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- Liegt v_4 im Erzeugnis $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$? (Begründen Sie Ihre Antwort.)
- Sei $U = \langle v_2, v_3, v_5 \rangle_{\mathbb{Q}}$. Bestimmen Sie $\dim U$.

Lösung.

- $A \cdot v_1 = v_1$ 1 Punkt.
und $\lambda_1 = 1$. 1 Punkt.
- $\chi_A = \det(A - XI_3) = -X^3 + 2X^2 + X - 2$. 1 Punkt.
Aus (a) wissen wir $\lambda_1 = 1$. 1 Punkt.
Dann

$$\begin{aligned} \chi_A &= -X^3 + 2X^2 + X - 2 \\ &= -X^3 + X^2 + X^2 - X + 2X - 2 \\ &= -X^2(X - 1) + X(X - 1) + 2(X - 2) \\ &= (X - 1)(-X^2 + X + 2) \\ &= -(X - 1)(X + 1)(X - 2) \end{aligned}$$

- und die anderen zwei Eigenwerte sind $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. 2 Punkte.
- Da $\dim \mathbb{Q}^3 = 3$ muss eine Basis genau 3 Vektoren haben. 1 Punkt.
Da wir hier aber eine Menge mit 2 Vektoren haben, ist diese Menge keine Basis. 1 Punkt.
 - Wir haben $\langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}} = \{sv_1 + tv_3 \mid s, t \in \mathbb{Q}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+t \\ t \\ s \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{Q} \right\}$. 1 Punkt.
Dann $v_4 \in \langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ genau dann, wenn $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $2s+t=1$, $t=0$, $s=1$ existieren. Aber mit $t=0$ und $s=1$ ist die erste Gleichung nicht erfüllt. Es folgt: $v_4 \notin \langle v_1, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$. 1 Punkt.
 - Das Tupel (v_2, v_3) ist linear unabhängig und $v_5 = 2v_2 + 2v_3$. 1 Punkt.
Also $U = \langle v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{Q}}$ und $\dim U = 2$. 1 Punkt.