

# Prüfungsklausur — Höhere Mathematik 1/2 (WS/SS 2024/25)

Termin: 18.08.2025

Hinweise: Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen. Es sind weder Formelsammlungen noch elektronische Hilfsmittel erlaubt.

Die Bearbeitung erfolgt auf dem Klausurbogen unter den jeweiligen Aufgaben. Falls nötig, verwenden Sie bitte die angehängten zusätzlichen Seiten für die Bearbeitung. Bitte machen Sie auch entsprechend kenntlich, dass ihre Lösungswege auf den Zusatzseiten fortgesetzt werden.

Mit einem Stern gekennzeichnete Teilaufgaben sind Bonusaufgaben.

Abgaben in Rot-, Grün- oder Bleistift werden nicht gewertet.

Hilfsmittel: **keine**

Bearbeitungszeit: 180 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

|    |    |    |     |     |          |
|----|----|----|-----|-----|----------|
| A1 | A2 | A3 | A4  | A5  | A6       |
|    |    |    |     |     |          |
| A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | $\Sigma$ |
|    |    |    |     |     |          |

---

### Aufgabe 1. (Logik) [7 Punkte]

- (a) Definieren Sie die folgenden logischen Verknüpfungen mithilfe von Wahrheitstabellen:

$$p \rightarrow q, \quad p \vee q, \quad p \wedge q.$$

Tragen Sie dazu die entsprechenden Wahrheitswerte (w/f) in die untenstehende Tabelle ein.

- (b) Prüfen Sie mithilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Äquivalenz gilt:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Nutzen Sie dazu untenstehende Tabelle.

- (c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort.

(i)  $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} : n < m$

(ii)  $\exists_{m \in \mathbb{N}} \forall_{n \in \mathbb{N}} : m < n$

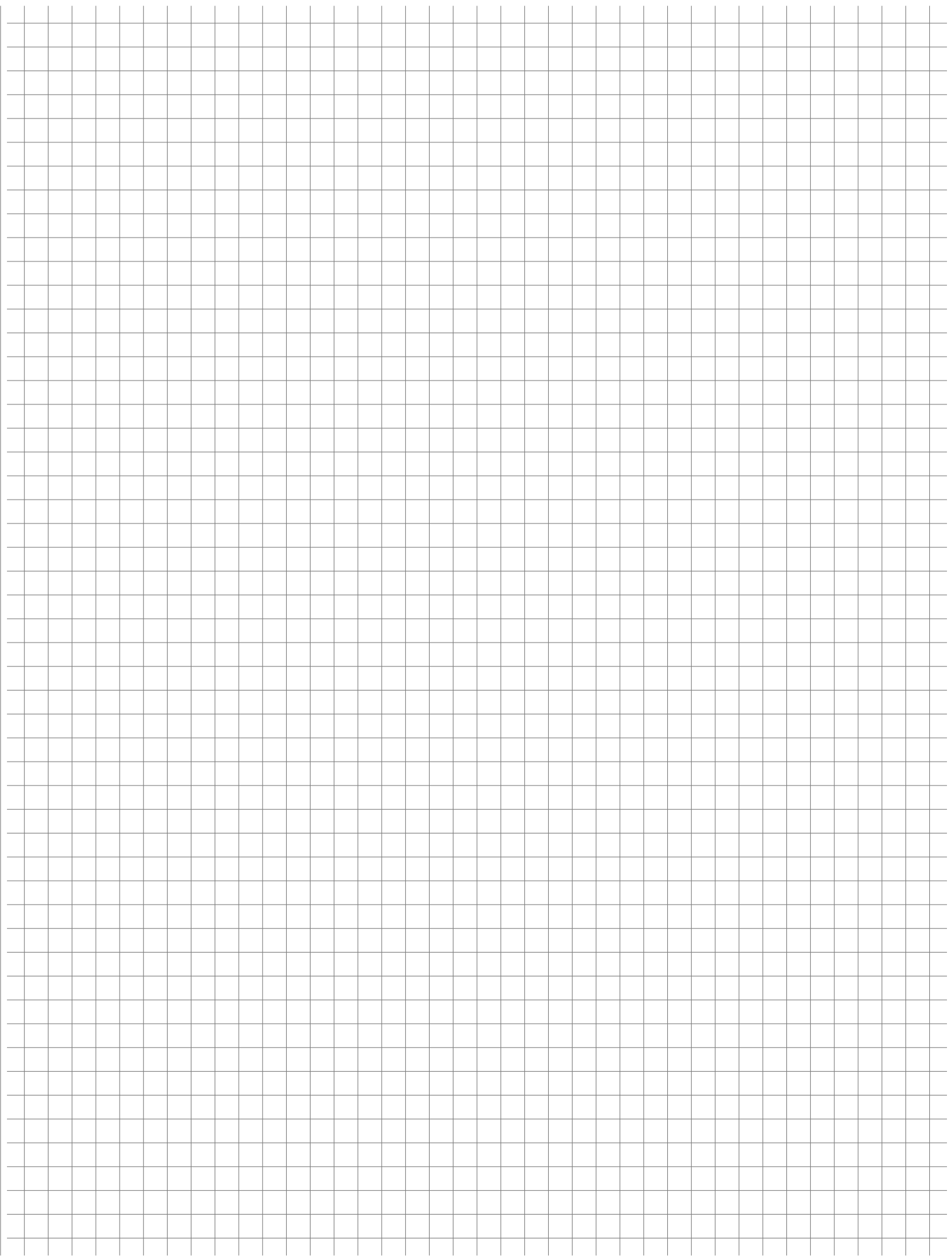
Geben Sie für beide Aussagen deren Negation in Quantorensprache an.

(a)

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|-------------------|------------|--------------|
| w   | w   |                   |            |              |
| w   | f   |                   |            |              |
| f   | w   |                   |            |              |
| f   | f   |                   |            |              |

(b)

| $p$ | $q$ |  |
|-----|-----|--|
| w   | w   |  |
| w   | f   |  |
| f   | w   |  |
| f   | f   |  |



**Aufgabe 2. (Mengen) [7 Punkte]**

Es sei  $M$  eine Obermenge und es seien  $A, B \subseteq M$  Teilmengen von  $M$ .

(a) Geben Sie die Definition folgender Mengen-Operationen an:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A^c$$

Skizzieren Sie die Mengen darüberhinaus als Venn-Diagramme.

**Hinweis:** Formulieren Sie alle Definitionen mit Aussageformen.

(b) Zeigen Sie schrittweise mithilfe von Venn-Diagrammen, dass folgende Identität gilt:

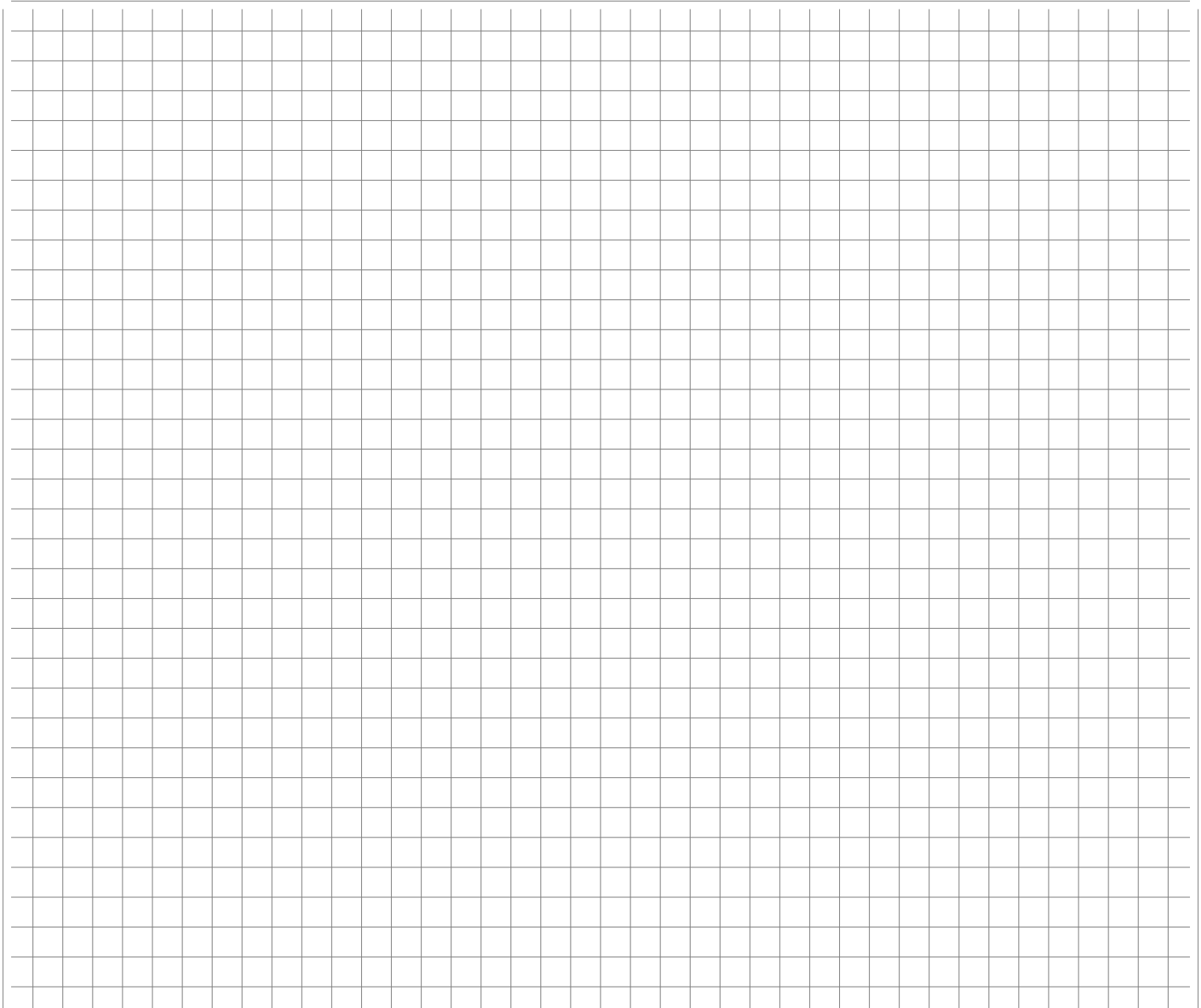
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

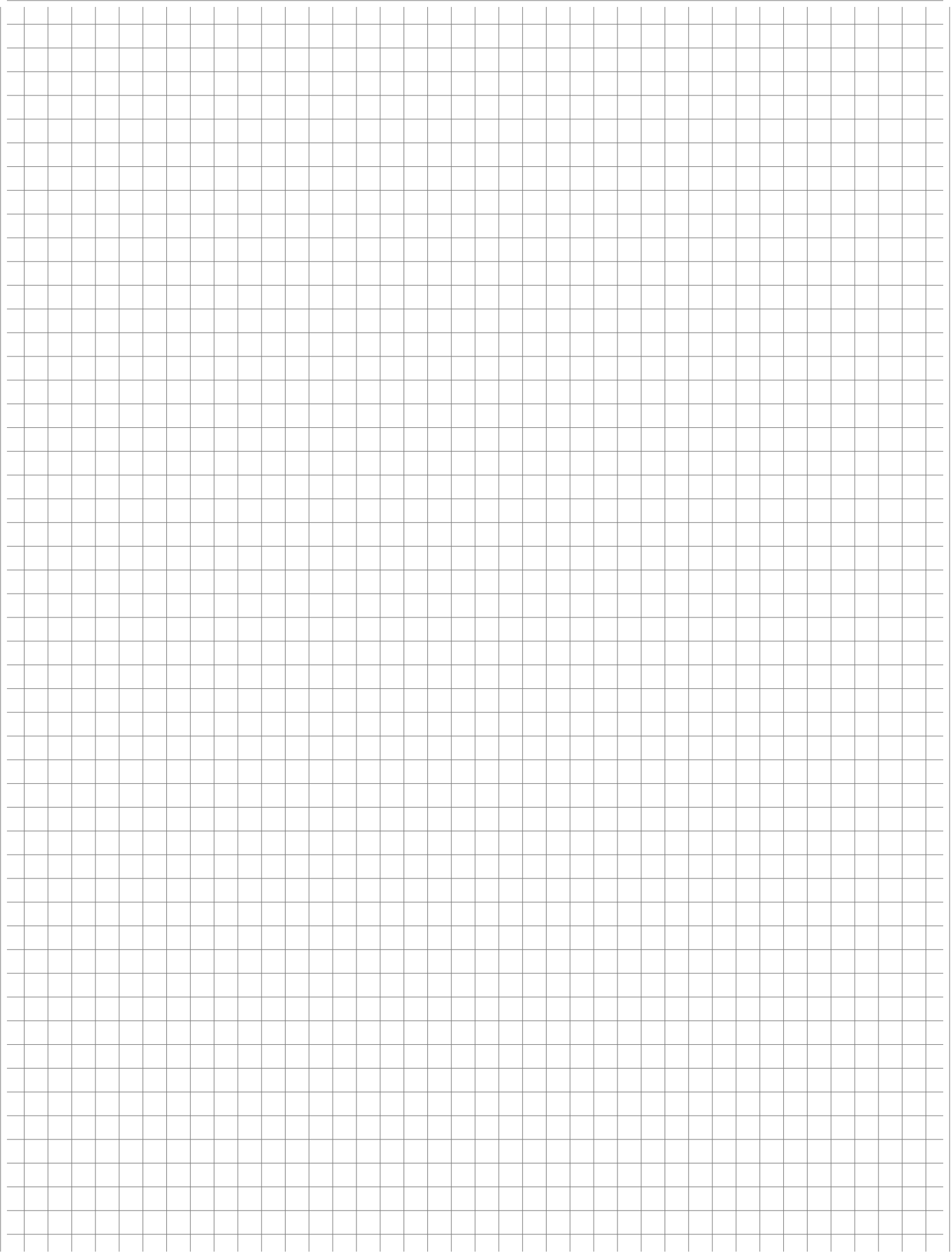
(c) Für die Anzahl  $\sharp$  der Elemente zweier Mengen  $A, B$  gelte

$$\sharp A = 10, \quad \sharp B = 7, \quad \sharp(A \cap B) = 3.$$

Bestimmen Sie

$$\sharp(A \cup B) \quad \text{und} \quad \sharp(A \setminus B).$$





**Aufgabe 3. (Induktion) [6 Punkte]**

(a) Geben Sie das Induktionsaxiom von Peano an.

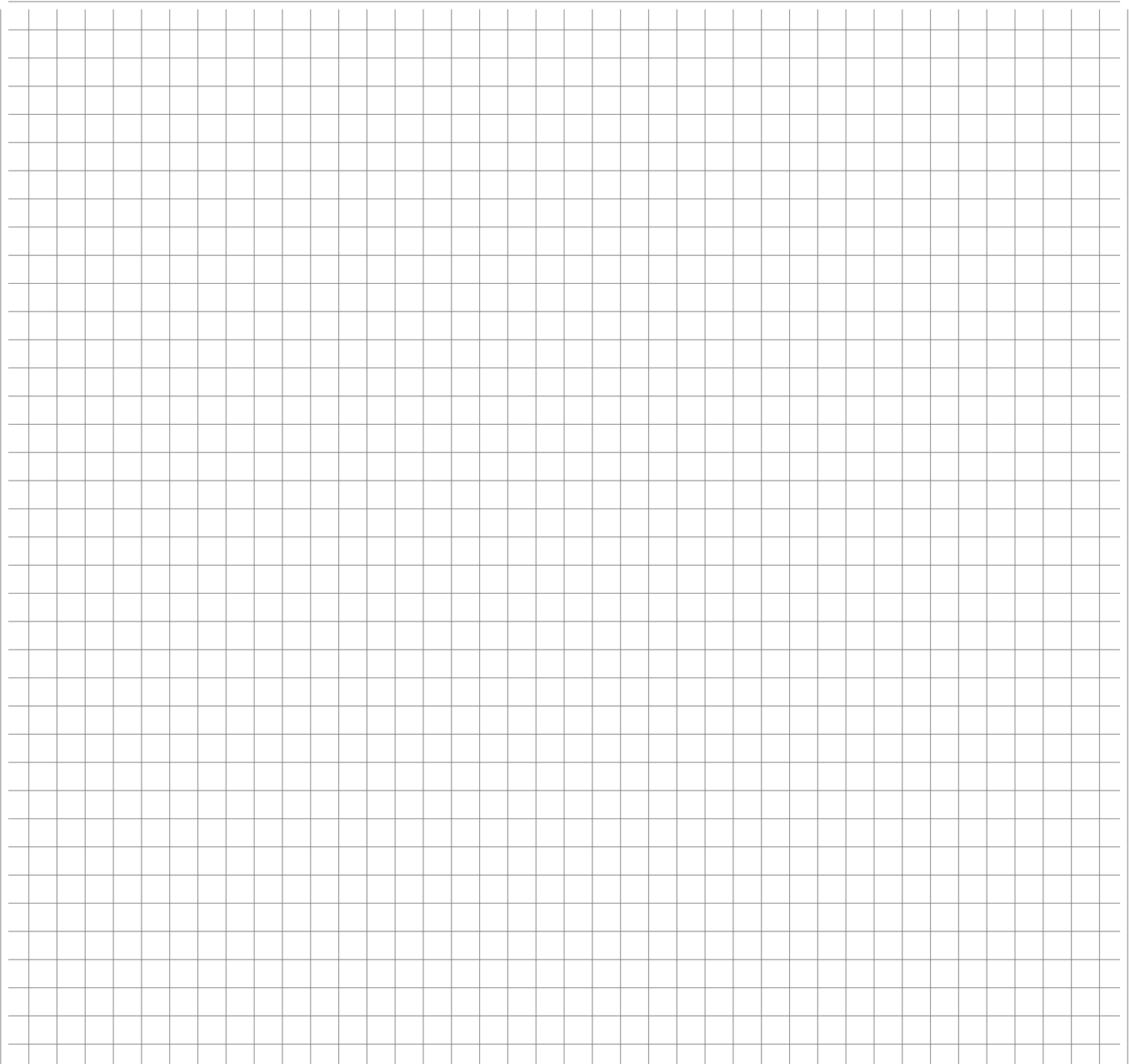
(b) Zeigen Sie, dass für alle  $n, k \in \mathbb{N}$

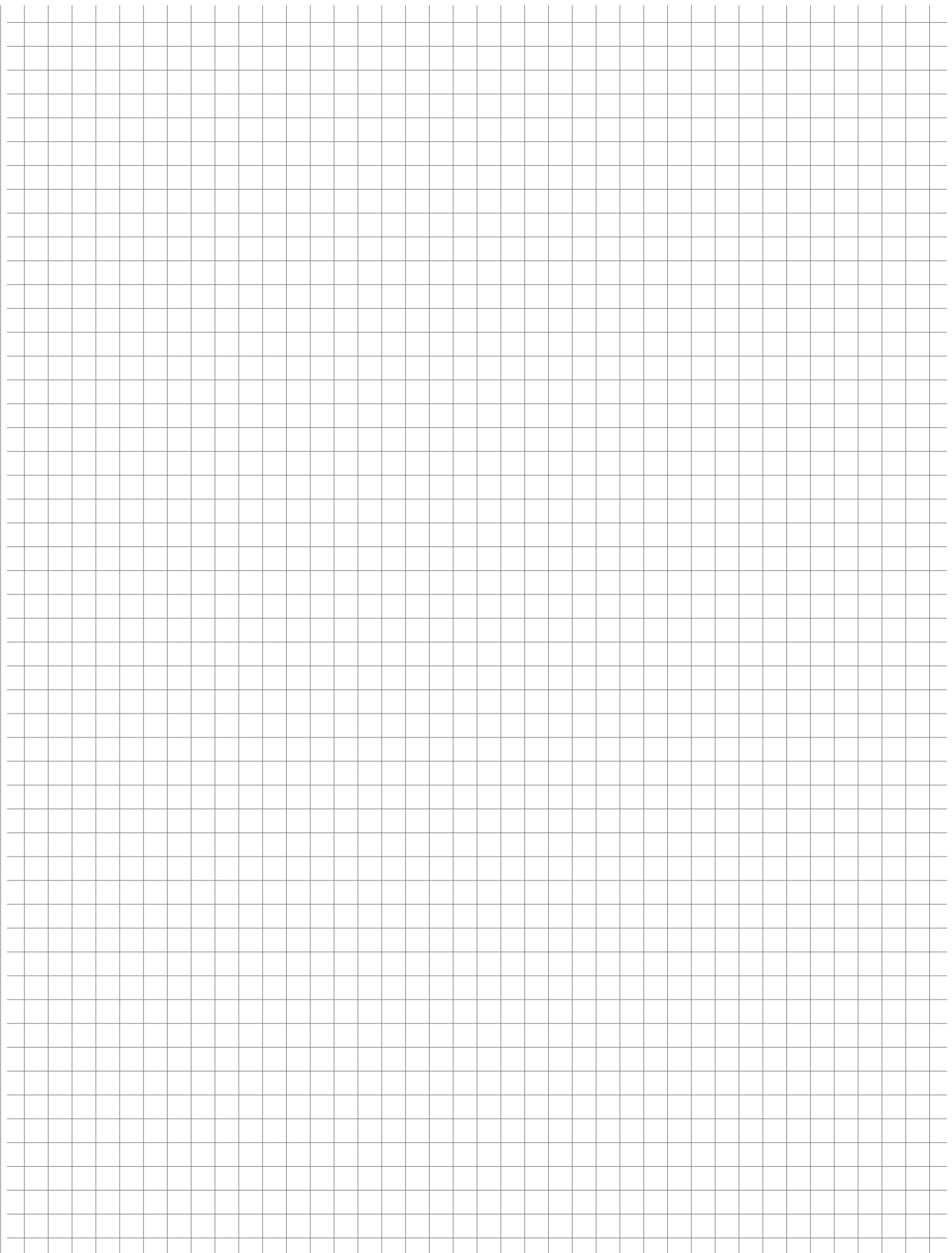
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(c) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgendes gilt:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

**Hinweis:** Verwenden Sie die Identität aus Teilaufgabe (b).





**Aufgabe 4. (Folgen) [8 Punkte]**

Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen.

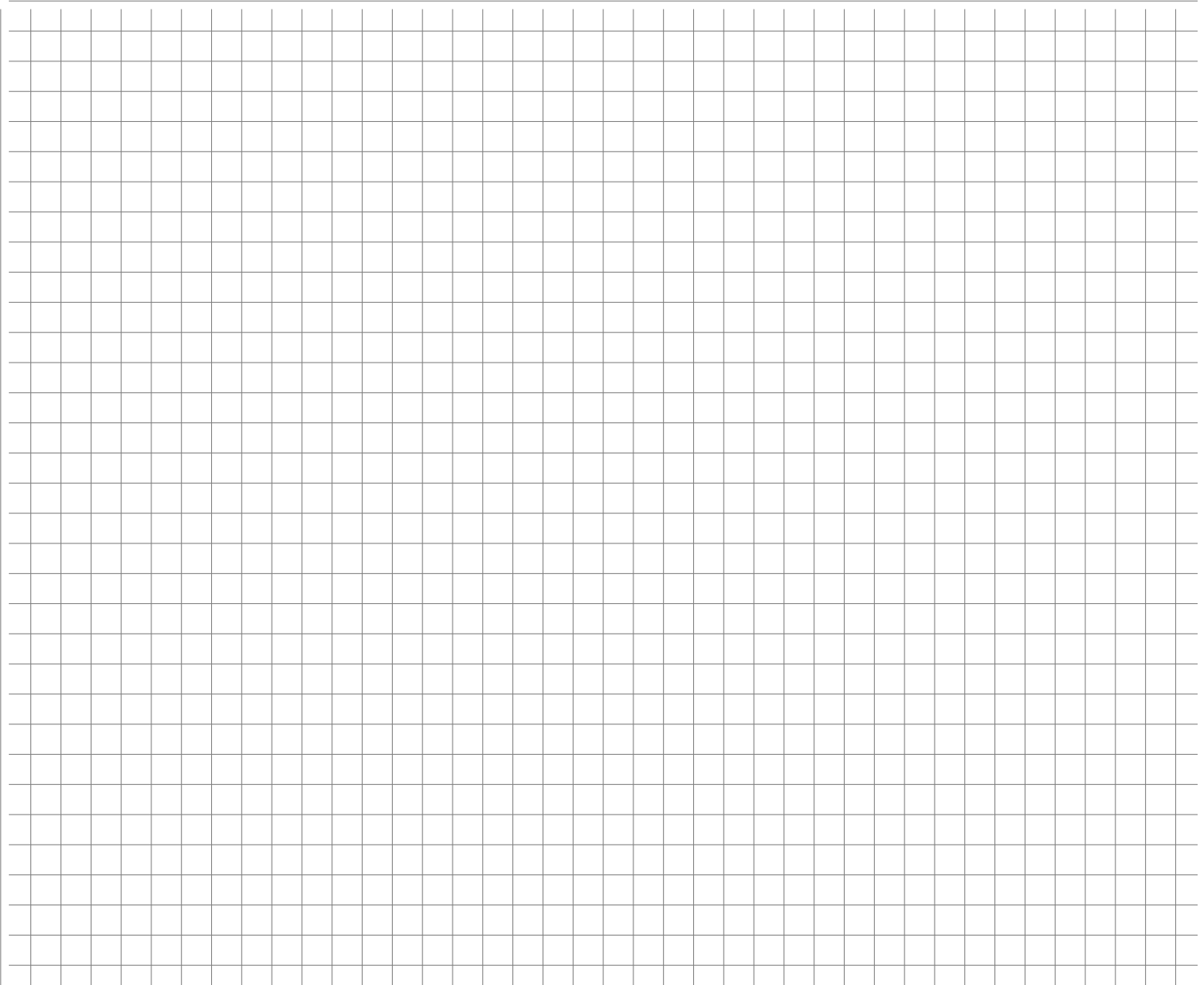
- (a) Geben Sie die Definition dafür an, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist.
- (b) Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Cauchy Folgen. Zeigen Sie, dass  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge ist.
- (c) Finden Sie zwei konvergente Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

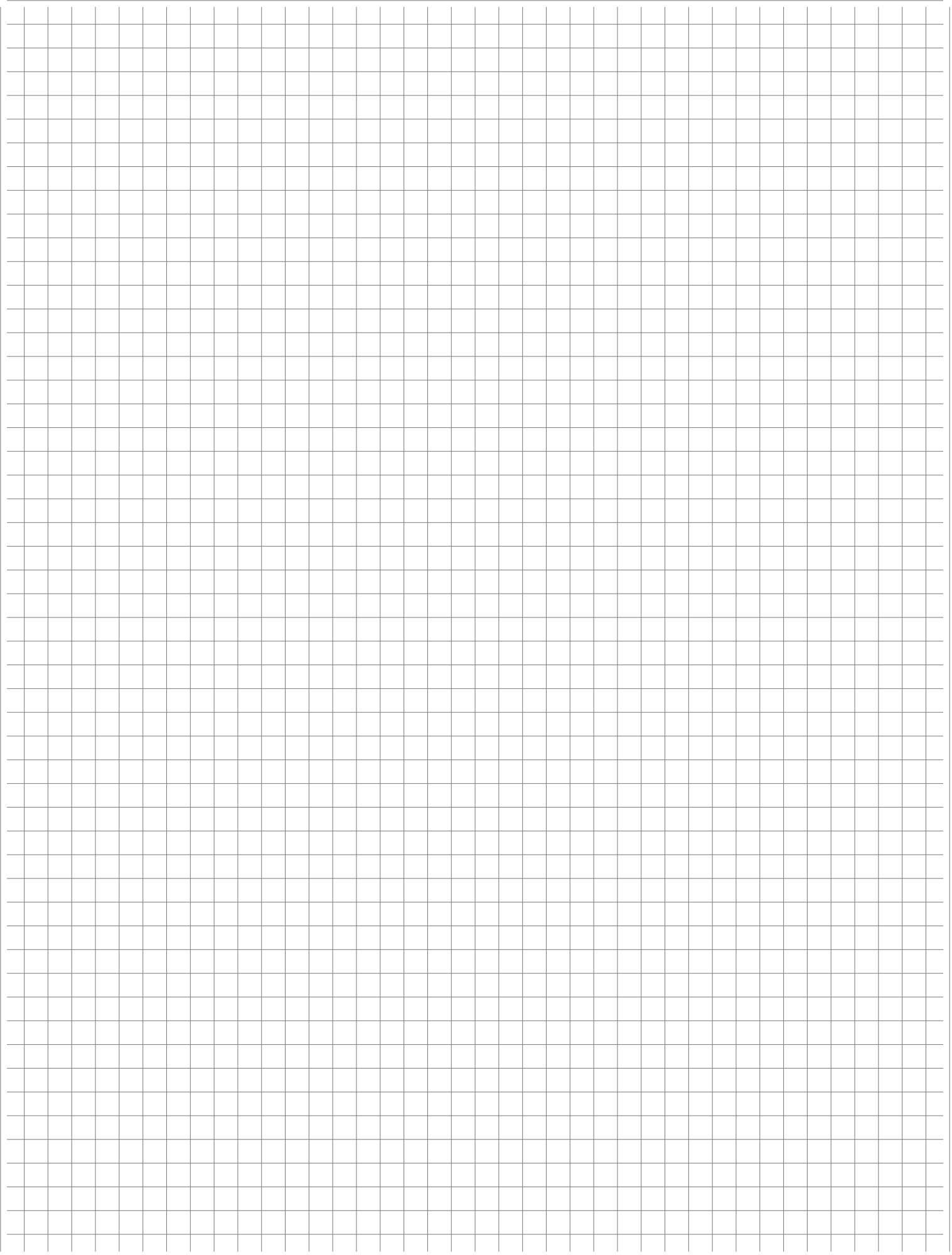
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0,$$

so dass der Quotient  $\frac{a_n}{b_n}$  divergiert. Begründen Sie kurz, warum dies kein Widerspruch zum Quotientengesetz für Grenzwerte ist.

- (d) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2(n+1)^2}$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$





**Aufgabe 5. (Reihen) [5 Punkte]**

- (a) Formulieren Sie das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen.  
(b) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergent, jedoch nicht absolut konvergent ist:

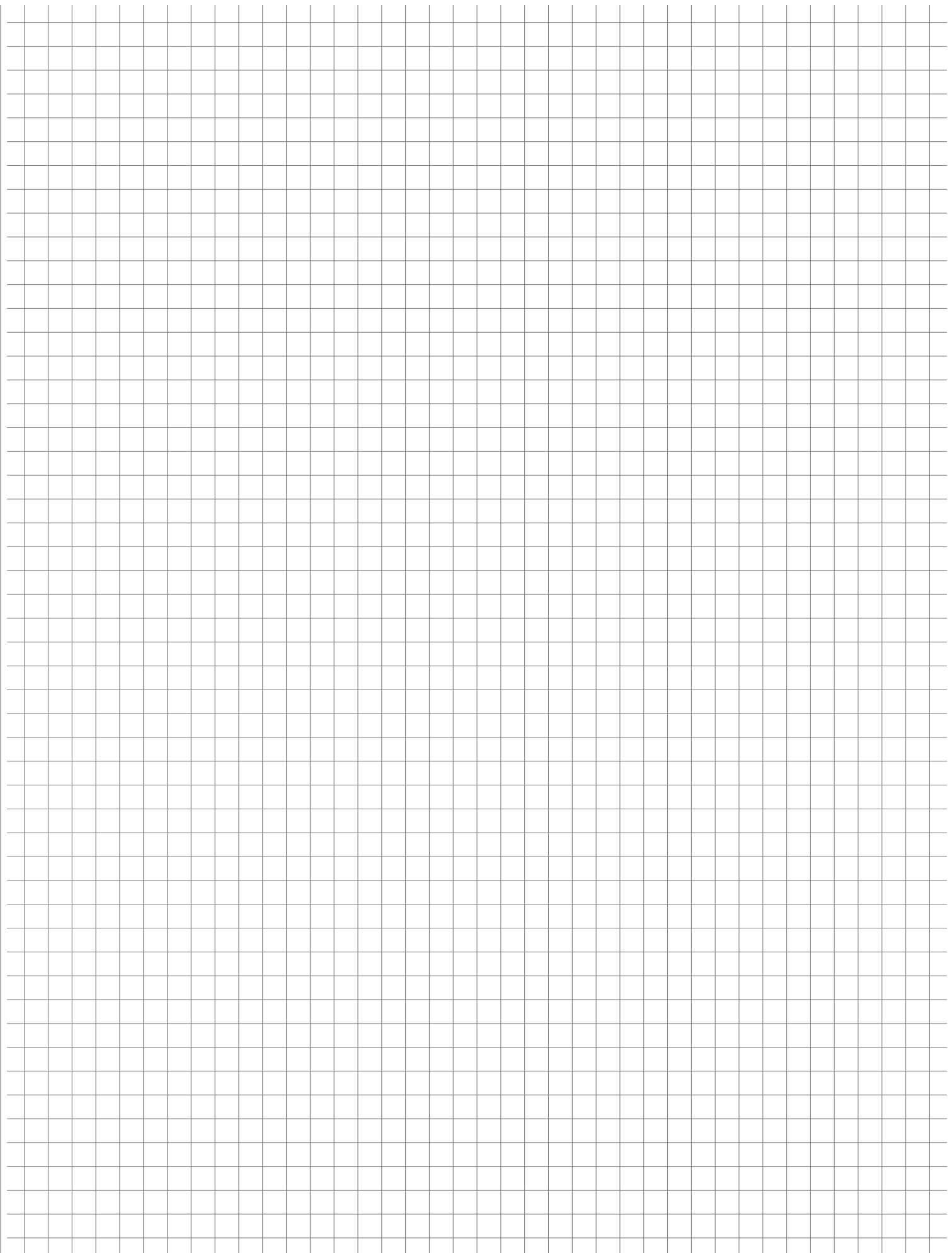
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}k)}{\sqrt{k}}$$

**Hinweis:** Betrachten Sie für die Folge  $a_k = \cos(\frac{\pi}{2}k)$  die Teilfolgen  $a_{4k-3}$ ,  $a_{4k-2}$ ,  $a_{4k-1}$  und  $a_{4k}$ .

- (c) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2} + 5^k}{10^k}.$$





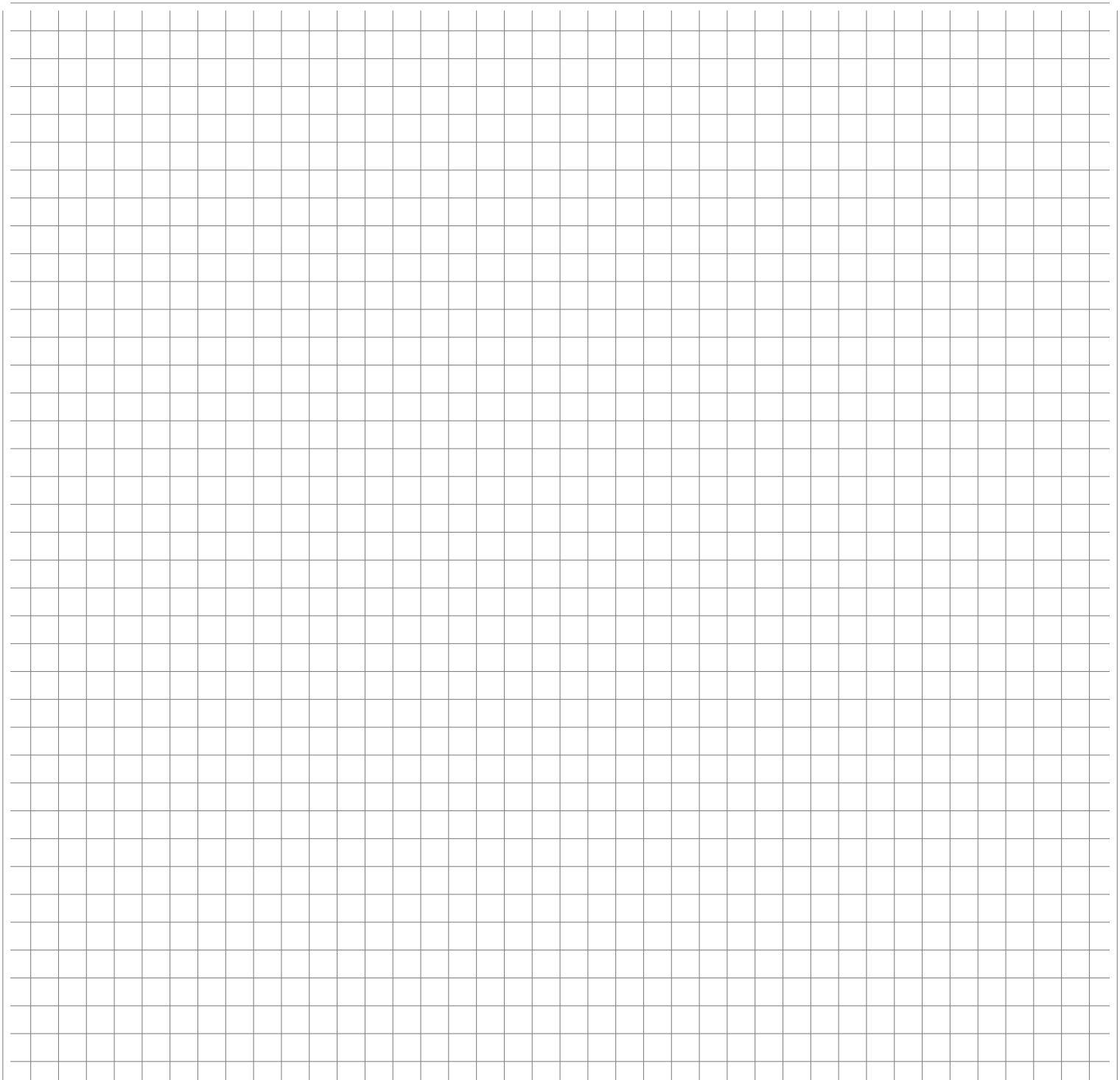
**Aufgabe 6. (Kurvendiskussion) [10 Punkte]**

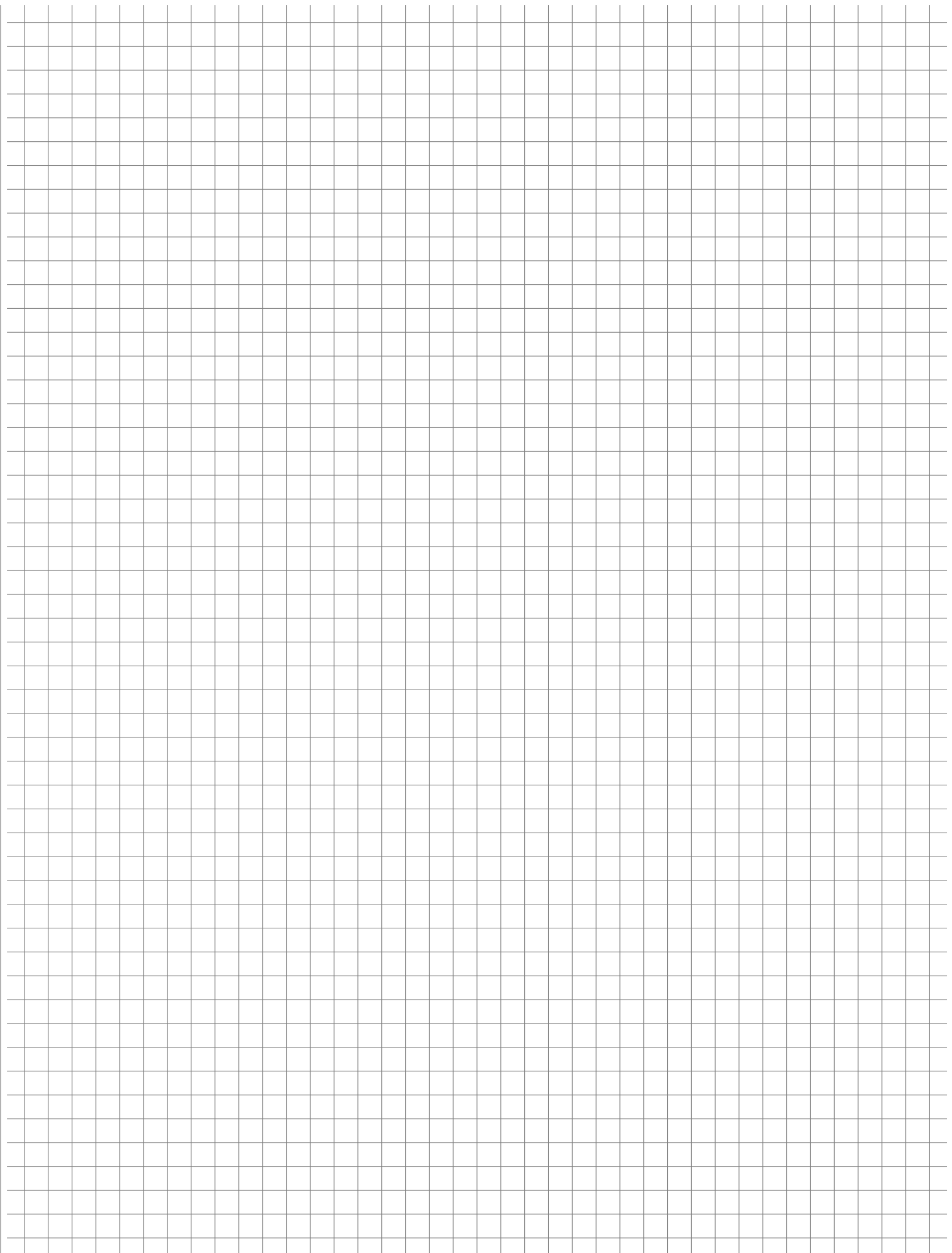
- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Geben Sie die Definition dafür an, dass
- (i)  $f$  in  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein lokales Minimum besitzt;
  - (ii)  $f$  in  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein globales Minimum besitzt.

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g(x) = (x^3 - 2x)e^x.$$

- (b) Geben Sie erste und zweite Ableitung von  $g$  nach  $x$  an.  
(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema sowie deren Art.  
(d) Begründen Sie, dass ein globales Minimum existiert, jedoch kein globales Maximum.





**Aufgabe 7. (Integrale) [8 Punkte]**

(a) Geben Sie

(i) ein notwendiges Kriterium, sowie

(ii) ein hinreichendes Kriterium

dafür an, dass eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar ist.

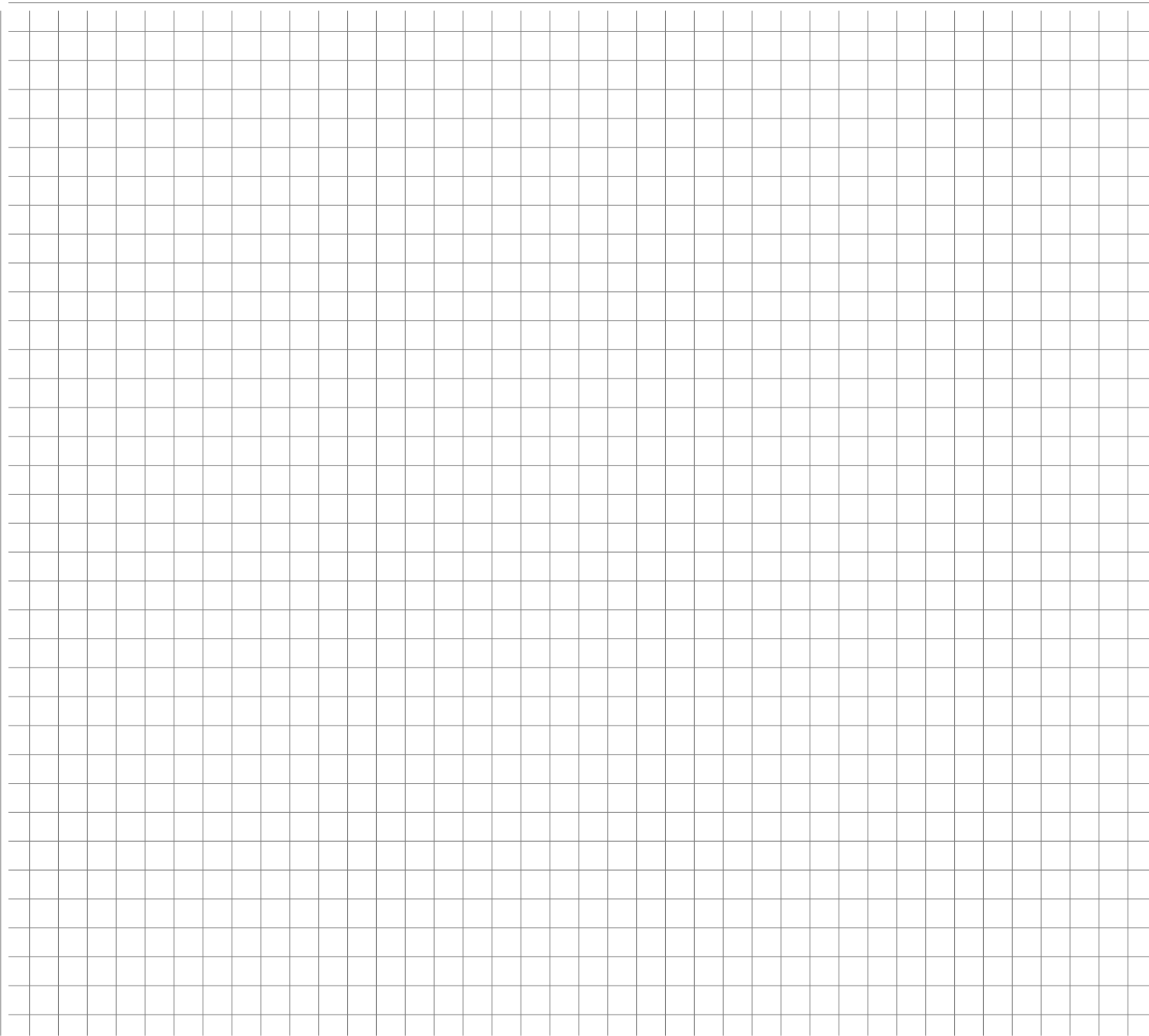
(b) Leiten Sie aus der Produktregel der Differentialrechnung die Formel der partiellen Integration her.

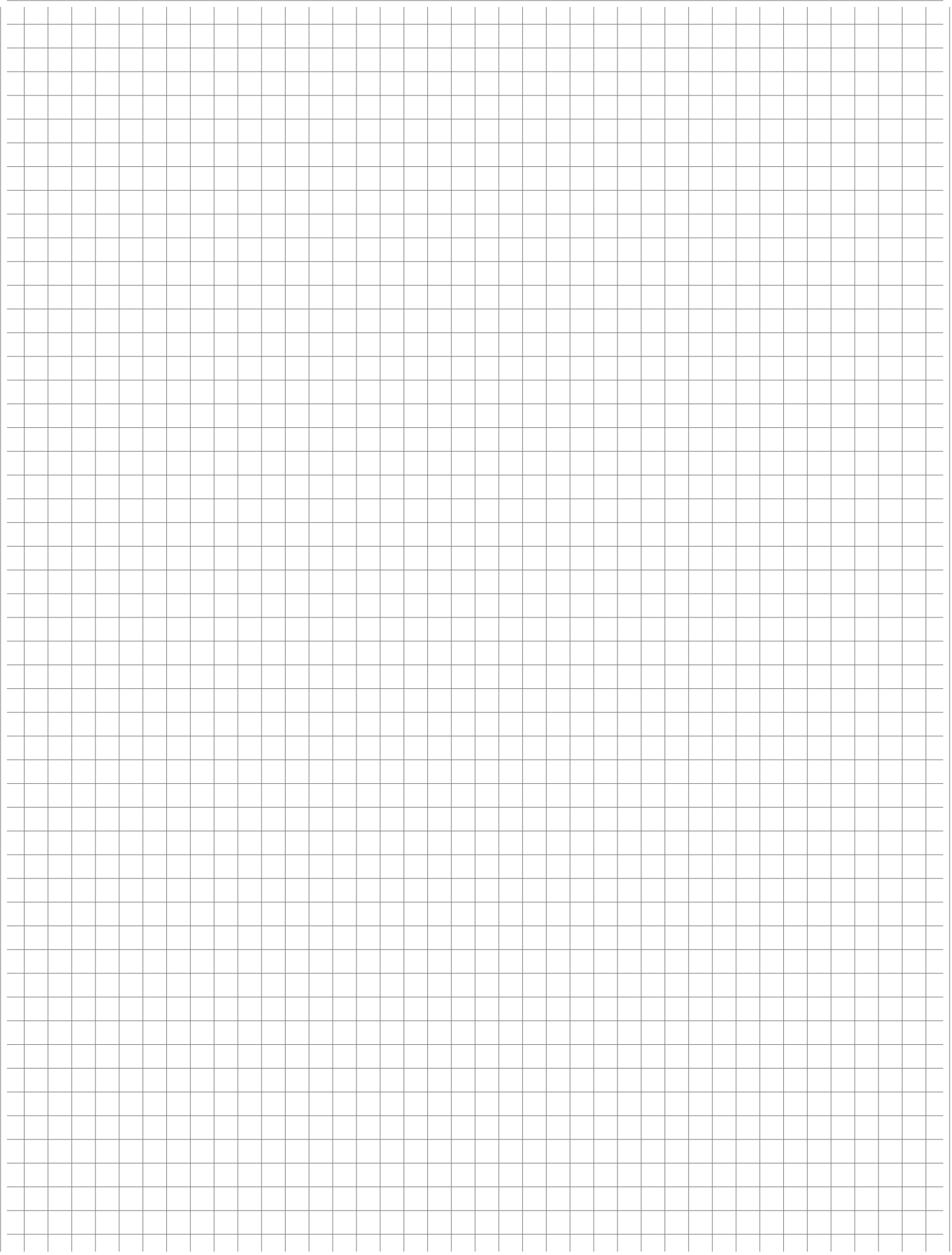
(c) Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(i)  $\int \frac{5x + 9}{x^2 - 1} dx$

(ii)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx$

(iii)  $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx$





**Aufgabe 8. (Rotationskörper) [4 Punkte]**

(a) Formulieren Sie das Prinzip von Cavalieri.

(b) Seien  $h, R > 0$  und

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, h], 0 \leq x \leq \frac{R}{h}(h - y) \right\}$$

Skizzieren Sie die Menge  $M$ .

(c) Leiten Sie mithilfe der Menge  $M$  und dem Prinzip von Cavalieri die Formel

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

für das Volumen eines Kegels mit Höhe  $h$  und kreisförmiger Grundfläche mit Radius  $R$  her.

(\*d) **Bonusaufgabe [2 Punkte]** Leiten Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt eines Kegels mit Höhe  $h$  und kreisförmiger Grundfläche mit Radius  $R$  her.





**Aufgabe 9. (Matrizen) [12 Punkte]**

(a) Sei  $A \in M^{n,n}(\mathbb{R})$ . Geben Sie die Definition dafür an, dass  $A$

- (i) symmetrisch ist;
- (ii) normal ist;
- (iii) orthogonal ist;
- (iv) diagonalisierbar ist.

(b) Sei

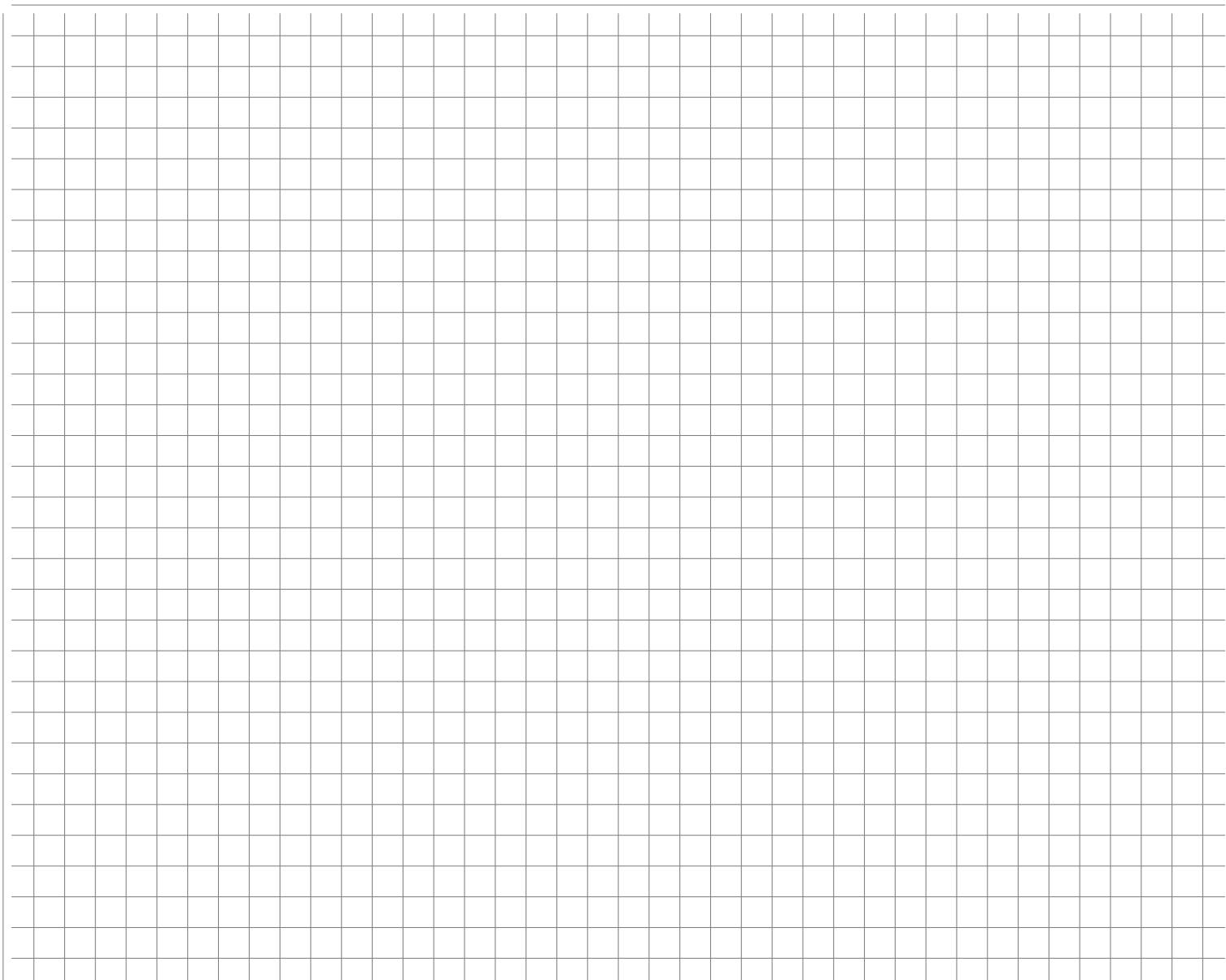
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie die Determinante, die Spur und das charakteristische Polynom von  $A_\alpha$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .

(c) Begründen Sie, dass  $A_\alpha$

- (i) im Fall  $\alpha = 0$  diagonalisierbar ist;
- (ii) im Fall  $\alpha \neq 0$  nicht diagonalisierbar ist.

(d) Bestimmen Sie eine orthogonale Diagonalisierung von  $A_\alpha$  im Fall  $\alpha = 0$ .



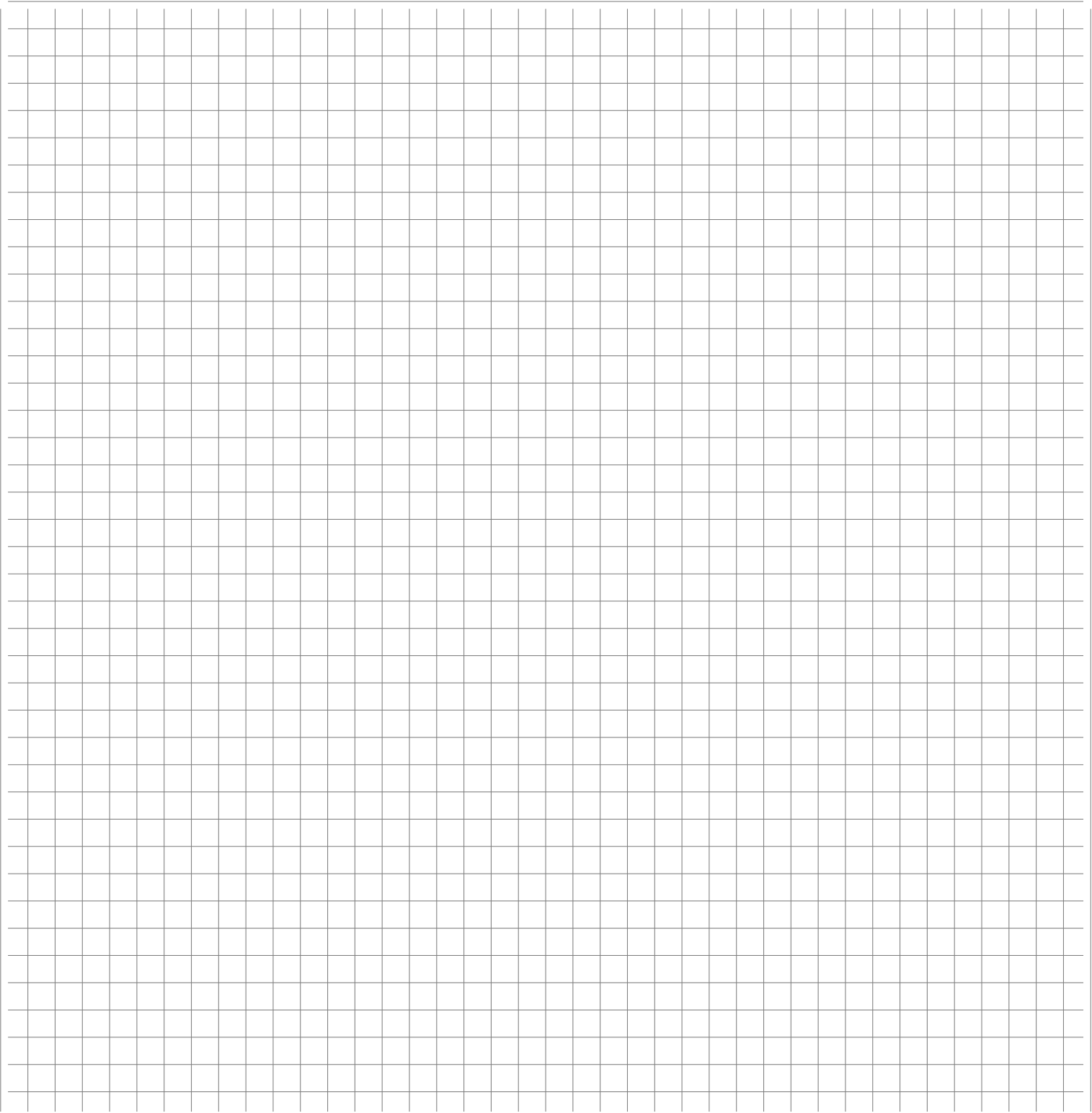


**Aufgabe 10. (Lineare Gleichungssysteme) [5 Punkte]**

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrr} -\alpha x_1 & & + x_3 & = 0 \\ 2x_2 & + 2x_3 & - 4x_4 & = 2 \\ 4x_2 & & + x_4 & = 0 \\ x_2 & + x_3 & + \alpha x_4 & = 1 \end{array}$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Für welche  $\alpha$  besitzt das lineare Gleichungssystem keine / genau eine / unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit des Parameters  $\alpha$ .





**Aufgabe 11. (Extrema) [11 Punkte]**

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar.

- (a) Geben Sie die Definition des Gradienten und der Hesse-Matrix von  $f$  an.
- (b) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass in  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ein lokales Minimum von  $f$  vorliegt.

Sei nun  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

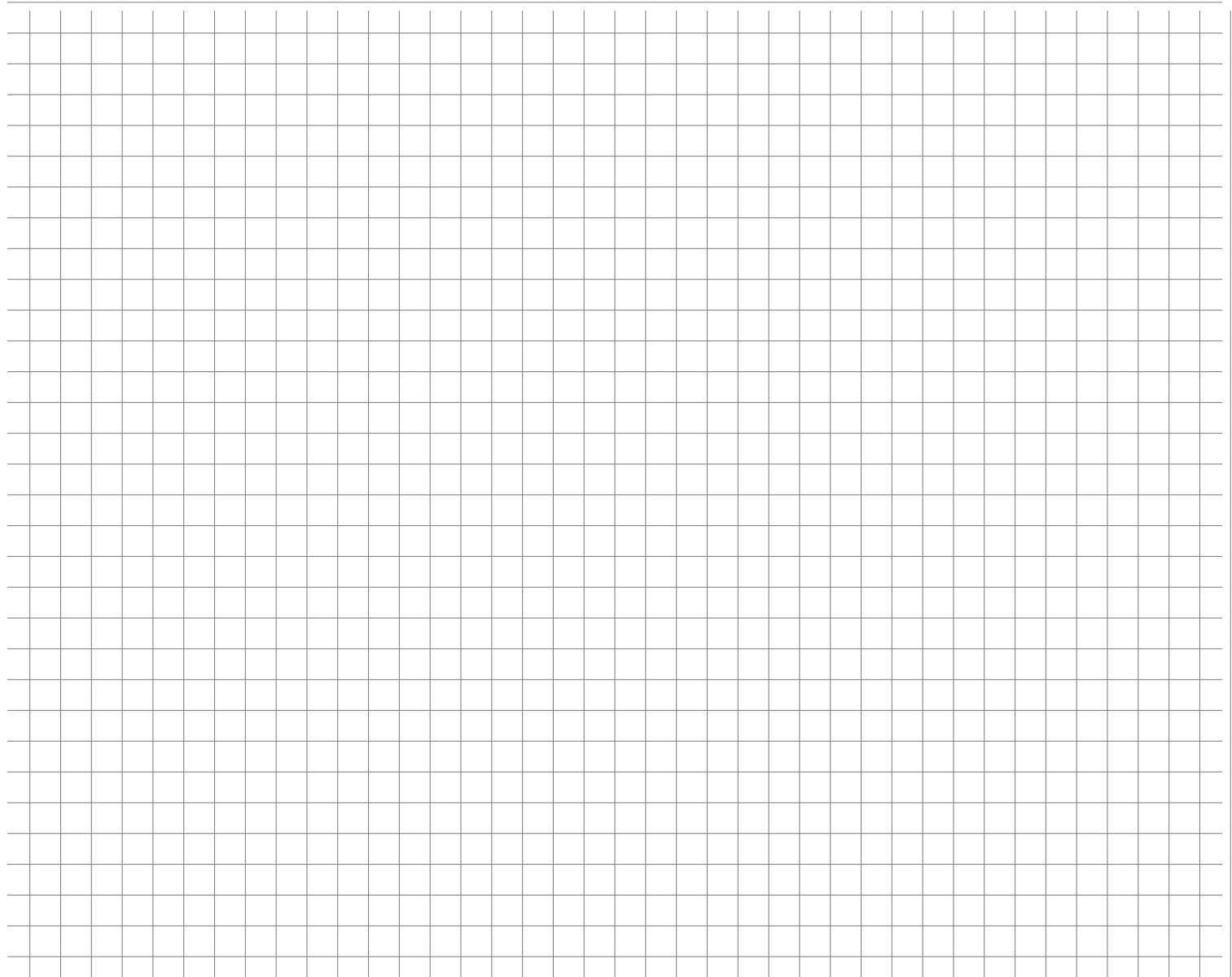
$$g(x, y) = x^2 + 2xy - y^3.$$

- (c) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von  $g$ .
- (d) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema von  $g$ .
- (e) Betrachten Sie  $g$  unter der Nebenbedingung

$$y + 2x = 0.$$

Berechnen Sie Kandidaten für Extremstellen von  $g$  unter der Nebenbedingung mithilfe der Methode von Lagrange.

- (\*f) **Bonusaufgabe [2 Punkte]** Bestimmen Sie die Art der in Teilaufgabe (e) berechneten Extremstellen.





This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin, light gray lines. The grid covers the entire area of the page, leaving no margins or other markings. There are 20 columns and 20 rows of squares, creating a total of 400 square units.

